

一 目的篇

思维和思维效率

思维是当今世界上被人们认识的物质运动的仅有的一种形式，这种物质运动能够转化为精神的运动。这种物质运动是在大脑中进行的，不仅是物理的，而且是化学的。这种精神活动包括意识、认识、记忆、回忆、联想等。说到底，人脑是思维的器官，思维是人脑的机能。

关于思维同脑中的生物的、化学的、物理的运动的联系与区别，恩格斯写道：“有机的生命没有机械的、分子的、化学的、热的、电的等等的变化是不可能的。但是，这些次要形态的存在并不能把所考察的每一情况下的主要形态的本质包括无遗。终有一天，我们一定可以用实验的方法把思维‘归结’为脑子中的分子的和化学的运动，但是难道这样一来就把思维的本质包括无遗了吗？”事实上，恩格斯在谋求对思维作出唯物主义的解释的同时，还反对把思维等同于脑的生

理过程。

关于思维是脑的机能却并不等同于脑的生理过程，恩格斯进一步指出：“生理学当然是有生命的物体的物理学，特别是它的化学，但同时它又不再是专门的化学。因为一方面它的活动范围被限制了；另一方面它在这里又升到更高的阶段。”现在，不仅有了脑电图、脑血流图，而且有了测试脑声、脑光、脑磁、脑机械波的仪器，甚至，可以取得与某种思维活动（比如，听音乐或解数学题）同时空的物理信息；这测得的数据并不是思维。

近几十年来，不少哲学家、心理学家和神经生理学家对思维与脑的关系问题进行了讨论和研究，提出了不少新见解，在探讨思维与脑的相互作用方面，取得了不少进展。例如，学习、记忆活动引起脑内物质的变化，就是颇有说服力的证据。

关于思维的定义，不少人发表了许多很好的见解，然而，我认为：最为现实、最易把握的定义，应该首推从信息论的观点提出的定义。这个定义是：

“思维是人接受信息、存贮信息、加工信息以及输出信息的全过程。”

接受信息，就是人对客体或人自身的感知过程，通过眼、耳、鼻、舌、身和各种技术手段，

使人直接或间接与客体发生联系，从而接受客体发出的信息，这一信息传输到大脑而形成表象，就是思维的开端。例如，看书是用眼去接受以书本为载体的信息；听声，则是用耳去接受以声波为载体的信息；用手去捏物体，物体给手一个反作用力，这个反作用力作用在手上也可看作是我们从物体接受的一个信息。人练气功时，默念字句，大脑自身就从大脑的某一局部接受信息。而观察、实验等手段则可以说是人们开拓接受信息源泉的措施。

存贮信息，就是对信息进行记忆。接受的信息传输到大脑后，此信息就会形成一种表象而存贮在大脑中。经过加工而得到深化了的知识，也能作为信息存贮在大脑中。

加工信息，这里之所以用“加工”二字，是因为思维活动是能动的，它可以创造出新的信息。加工信息，就是大脑对所接收到的信息进行识别、分类、分析、综合，以及运用概念进行推理、判断等的过程。在这个过程中，总是把所接受的信息和大脑原已存贮的知识相联系，从而作出自己的判断。

输出信息就是在接受信息，对信息进行加工并产生自己的判断之后，把这种判断用文字的，或语言的，或某种行为姿态的形式表达出来。一般说来，输出的信息也在自身大脑中进行存贮。

总之，人的思维活动是由接受信息、存贮信息、加工信息、输出信息四个环节有机地组成的一个整体。

然而，人的思维并不总是围绕一定的目标，为了解决一定的问题而进行的。我们说“思维效率”时所说的“思维”，不是一般的思维，它是有明确的目标的。

思维效率的高低，依达到一定目标所需时间的短长而定。以同样的时间达到既定的目标，思维效率的高低则依其目标的深与浅、大与小、创新与保守而定。

射门

在足球场上，“头球”、“铲球”、“传球”、“过人”都是为了“射门”；在篮球场上，“断球”、“传球”、“运球”都是为了“投篮”。同样，在进行思维活动时，也有一个紧抓目标、注意力集中的问题。这是十分重要的。

关于科学家能做到注意力高度集中的故事就有不少。著名的阿基米德测试王冠的轶事就说到他全神贯注于一个问题时，会完全忘却了周围环境。据说希伦王让首饰匠打了金王冠，他怀疑王冠被工匠掺进了银子，便求教于阿基米德。有

一天，阿基米德在洗澡时，发现了流体静力学第一定律而解决了这个问题。据说，当时他连衣服也没有穿，就从浴室出来，跑到街上大喊：“我知道了！我知道了！”当叙拉古陷落被掠时，他正在专心考察沙盘上的几何图形；以致一个进行抢劫的罗马士兵进了他的家、走近他所画的几何图形时，他仍不明外边发生了什么事，怕图形被碰乱，就斥责那个罗马士兵，命他远离他的图形；这个抢劫者勃然大怒，就一枪刺死了这位老人。关于牛顿也有一个类似的故事。说的是：有一次，牛顿的朋友斯图克利博士请他吃鸡肉饭。牛顿出去了一会儿，但是，桌子上已经放好盖着的盘子，里面是烹调好的鸡肉。牛顿忘记吃饭这事，又搞开自己的研究了，因而超过了时间。斯图克利把鸡吃了，然后再把骨头放在盖着的盘子里。牛顿回来后，发现只剩下骨头了。他说：“亲爱的，我竟然忘了我们已经吃了饭。”

这些轶事笑闻里揭示了一个道理：注意力集中正是他们思维高效率的重要原因，甚至是根本原因。

这还可以通过对自己思维活动的反思来理解。试想：当我们的思维活动，像过眼云烟那样漂泊不定时，时间尽管长，也毫无收获；当我们的思维活动，专注地凝聚在一个问题上时，用不了多少时间，就会有进展。

一句话，在我们进行思维活动时，要像足球健将那样，紧紧地盯住一点：射门。

二 材料篇

感官为思维提供了什么

如果把思维理解为信息加工的过程，那么所加工的对象——信息——就是思维材料。

关于思维材料的来源必须从感觉说起。客观事物直接作用于人的感觉器官，引起神经冲动，由感觉神经传导到脑的相应部位，便产生感觉。因分析器的不同，感觉可分为视觉、听觉、嗅觉、味觉、肤觉等。每种感觉器官都分工执行不同的反映职能。感觉是人认识事物的第一步，为思维提供感性材料（确切些说，人的思维并不单纯地以感觉为材料。正因为如此，我们还要讲一讲“知觉”和“表象”）。

知觉是在感觉的基础上形成的，它是多种分析器分析综合活动的结果。由于知觉具有整体性、选择性和恒常性，所以，虽然客观事物通常只有部分直接作用于感官，人却能根据已有的知识和经验加以补充，对所感知的事物进行完整的

认识。

表象是对以前感知过而当时不在眼前的事物的形象的反映。换句话说，在记忆中保留下来的过去感知过的事物的映象叫表象。表象具有直观形象性和初步概括性的特征。

总之，感觉、知觉、表象都属于感性认识，都是思维的基本材料。

关于感觉有两点是必须注意的：第一，它受人这个生命体的感官的结构与功能的约束；第二，它对思维的作用至今没有被充分的认识。例如，人的视觉器官能分析光谱上390—770毫微米不同波长的光线，产生红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫等各种彩色感觉；人的听觉分析器能感受每秒20—20000次振动的声波。这都既表明其能力，又表明其局限性。在谈到各种感官对思维的作用时，必须认识到：人类认识活动什么时候也不是只靠一种孤立的感觉形态如视觉、嗅觉、听觉、触觉、味觉来进行的。任何对象性知觉尤其是表象都是多种感觉形态活动的结果。当复合刺激物的各个成分同时或先后作用于各个不同的分析器时，在大脑皮层上就形成了各种分析器之间的联系，由复合刺激物的作用所引起的各分析的联合活动就产生了知觉。而由气味分子激起的嗅觉常能对记忆与回忆起极为突出的作用。

人类的眼光不能和鹞鹰比远，但是人类发明

了望远镜，能够观察到远方的情况；发明了显微镜，能够见到极微细的东西。人类的听觉不能和猫比灵，但是他发明了留声机、无线电。于是人类低劣的视觉和听觉都得了补救，使任何动物都望尘莫及。

例如，除折射望远镜、反射望远镜、双目望远镜外，还有用以接收和测量天体无线电辐射的射电望远镜；我们还可以利用无线电收音机听到发自遥远的地方的声音。——这些都是我们感官的延伸。

显然，要为思维提供材料，主要靠的是我们的感官和感官的延伸。

知觉与经验

在讲知觉与经验的关系之前，先得讲讲诸感觉，因为知觉只不过是感觉的整体化，感觉只不过是知觉的局部化、单项化。

视觉是辨别外界物体明暗和颜色特性的感觉。由光源直射或物体反射的光线作用于眼球的视网膜，引起其中感觉细胞的兴奋，再经神经传入大脑皮层枕叶产生视觉。视觉是整个视分析器活动的结果。人类视网膜中的视杆细胞对弱光有高度感受性，是夜视的感觉器官；视椎细胞是

昼视和色觉的感受器，能分析光谱上390—770毫微米不同波长的光线，产生红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫等各种彩色感觉。视觉在对物体空间属性如大小、远近等的区分上，起着重要的作用。我们的视角也有一定的限制，视角指的是：从物体两端引出的两条光线在眼的光心交叉而成的夹角；正常视力能看清的最小物体所形成的夹角为 $1'$ 。

听觉是辨别外界物体声音特性的感觉。物体因振动而产生的空气波动（声波），从外耳传入，作用于耳鼓膜，进而通过中耳听小骨的振动引起耳蜗内感觉细胞的兴奋，再经听神经传入大脑皮层听区（颞叶），产生听觉。听觉是整个听分析器活动的结果。人类听分析器能感受每秒20—20000次振动的声波，能分辨两个差别很细微的声音，还能辨别声源的方位。

味觉是辨别外界物体味道的感觉。由溶解于水或唾液中的化学物质作用于舌面和口腔粘膜上的味觉细胞（味蕾），产生兴奋，再传入大脑皮层，引起味觉。味觉是整个味分析器统一活动的结果。基本味觉有甜、酸、苦、咸四种，其余都是混合味觉。味觉同其他感觉，特别同嗅觉、肤觉相联系。辣觉是热觉、痛觉和基本味觉的混合。

嗅觉是辨别外界物体气味的感觉。由物体发

散于空气中的物质微粒作用于鼻腔上部嗅觉细胞，产生兴奋，再传入大脑皮层，引起嗅觉。嗅觉是整个嗅分析器统一活动的结果。嗅觉同其他感觉，特别同味觉相联系。

肤觉是辨别物体的机械特性和温度特性的感觉。由触、压的机械刺激和冷、热的温度刺激作用于皮肤的相应感受器，传入大脑皮层，引起肤觉。肤觉是有关的整个分析器统一活动的结果。分触觉、温度觉和痛觉三类。触觉又包括：狭义的触觉、压觉和振动觉。温度觉是辨别冷热的感觉。由温度刺激作用于皮肤温度感受器，产生兴奋，传入大脑皮层而引起。刺激温度高于皮肤温度时引起热觉，低于皮肤温度时引起冷觉。皮肤温度常被视为温度觉的“生理零度”。但生理零度能随皮肤血管膨胀或收缩而变化，因而同一温度刺激在生理零度变化前和变化后所引起的温度觉有所不同。温度觉同其他感觉常发生联系，如颜色或声音可成为引起温度觉的信号。痛觉是辨别伤害机体各种刺激强度的感觉。由皮下游离神经末梢受到刺激，产生兴奋，传入大脑皮层，引起痛觉。中枢神经系统的许多部位都和痛觉有关。大脑皮层对痛觉可起调节作用。当刺激达到一定强度时，往往有痛反应。

知觉是不同类感觉相互联系和综合的结果。然而，仅仅这样说是不够的，对人类来说，还有

一种更加重要的知觉，即言语知觉。目前人们已经知道：言语信号是一种有复合结构的、不断变化的声学模式；看来这种声学模式是对音位信息的一种“编码”，而且从音位到声音和从声音到音位存在着复合的反映关系。

当今的论点是：知觉，部分是先天的，部分是习得的。思维科学工作者对知觉的先天—后天的争论应该予以密切的关注，这是因为：研究什么是习得的，什么是先天的，也就是在研究可塑性（即有机体适应于环境的程度），可塑性的最适宜的时期及其持久性；而这些都是对提高思维效率很重要的事情。

确切地说，对于每一种知觉和每一种知觉的不同侧面都存在一个敏感期。人这个有机体生命在这个时期，特别需要该类型的刺激作用；过了这个时期再给予这类刺激，就很难“唤醒”这种知觉了。

以视觉系统为例来说明知觉与经验的关系颇有便利之处。现已设计出从完整脑的单个神经元记录电活动的技术，这对了解视觉系统如何探查、认识形状的功能，看来是一个令人兴奋的突破。通常一系列精致的研究证明：在视觉系统中的单个细胞以高度有组织的形式发挥作用，觉察环境中像圆形，线条，边界及角这样的具体特征。整个视觉系统的细胞能以视网膜刺激的模式

来描述；这被称做视觉系统细胞的“感受野”。在视觉系统的每个层次上，细胞都是对特别的刺激成分作出反应，而且在每个相继的层次上，这些成分又被综合起来，使得可被觉察到的特征的复杂性越来越大。极度复杂的感受野被认为是来自复杂细胞、来自简单细胞的复杂感受野，以及来自外侧膝状细胞组成的简单感受野的各种输入的综合所决定的。在这里，起作用的有大神经元，也有微神经元。通常公认：大神经元的结构和功能受遗传制约，而微神经元的发展则不受遗传控制。对外源刺激作出反应，为有机体提供由于经验的变化而出现的可塑性的，正是微神经元。

知觉是取得经验的根据，而经验又常给知觉以促进和约束。充分地认识到它们的这种关系，将有助于我们发挥大脑的潜力。

甜不甜

新生儿就能对甜还是不甜做出正确判断，并与酸、咸、苦等其它味觉相区别。这是因为在人的舌表面存在味觉细胞，味觉细胞上的甜觉受体，能将甜的刺激通过面神经传入中枢。人们对味觉的化学基础的最早研究始于公元前350年。

现在，我们已知道在许多甜剂的化学结构中，都具有糖环或苯环这样的环状结构。

某种甜剂的“相对甜度”，需要专门的测量机构测定。我们有以蔗糖为标准来衡量甜度的相对指标。天然糖的甜度是很低的，相同分子数目的糖精等超甜物质，比蔗糖要甜约100 000倍。然而，这并不是说，我们人类的感觉能分辨出这种巨大的差别。首先，必须将糖精这类超甜物质稀释到与0.1—1.0M蔗糖相同的甜度，然后再确定其“相对甜度”。蔗糖溶液甜度的饱和量在1.0—2.0M之间，如果浓度再增加，就超出了人所能分辨的程度。

不同人群对甜度分辨的差异性，尚无资料可查。但是，某些疾病、头部外伤、缺锌都能引起味觉丧失。如果体内缺锌，二至四个月的补充治疗就可使味觉恢复，其中甜觉恢复得最快。

目前，解释物质产生甜味的理论有许多，其中，沙伦伯格的氢键理论最引人注目。这种理论认为，生甜团是甜剂分子具有的共同结构，它使机体产生甜觉。其本质是一种AH₁B₂结构。事实上是：甜剂分子中的AH₁B₂结构与受体上的相同结构互补，形成一种双重氢键结构。

甜觉产生的机理，可能是由于甜剂分子通过物体的AH₁B₂系统与味觉细胞表面的受体产生连接，引起离子内流。随着动作电位的产生，脉冲

就从味觉细胞传到大脑。

人类舌表面的味蕾在出生时最多，随着年龄的增加其数目逐渐减少。值得我们深思的是：

- (1)使味蕾增多或减少的生理原因究竟是什么？
- (2)有没有什么办法能够使味蕾保持一定的数量或放慢减少的速度？
- (3)使味蕾保持一定的数量对于延长寿命有什么意义？

目前，用非甜味的味觉调节物加强、减轻、消除或产生甜觉，已经有了一些办法。然而，这么做对人这个生命体的整体功能究竟起什么作用，还不得而知。不过，可以肯定的是：在这里也有一条通向思维的途径。

鼻子为我们开路

食物和饮料中的味道至少有四分之三不是靠味觉而是靠嗅觉感触到的，胡椒或薄荷的挥发性香味是通过从口腔后部开口的通道吸入后传送到鼻腔上部的嗅觉神经末梢上。

气味通过鼻子和口腔后部进入鼻腔，盘旋而上，到达鼻腔顶部，遇上数以百万计微小的嗅觉神经细胞浸在粘液中的纤毛，气味分子引起特定的神经感受器产生反应并且把信号输入嗅觉小球。信号是在小球中被破译出来的，于是你就意

识到你嗅到了某样东西，但还说不出是什么东西。这个信息接着被送到嗅觉皮层上，由后者，由后者给嗅到的气味打上标记（“这是荷花池”）。这一信息从嗅觉皮层分两路往下传，一路传到丘脑区 and 大脑皮层，在此处将眼前的景象与气味进行比较（“我闻到了荷花的气味。可我是在内蒙古草原，这是为什么？”）；另一路传到扁桃体和海马区，这个地方是处理情绪和记忆的，就是在这个部位，你可以回想起一个与某种气味有关的经历来（“这是四十年前夏天清华园中的荷花池……”）。

气味引起回忆这一神奇的方式不仅使研究神经的科学家们感兴趣，也使小说家们着迷。普鲁斯特说过酸橙花茶和马德琳甜饼的香味使他创作出不朽的《追忆似水年华》一书。吉卜林在他的诗歌《利赫滕堡》中写道，浸透了雨水的合欢花的辛辣气味能使他想起故乡。与景象、声音和触感相比，气味是能够持久的信息；爆竹闪出火花炸响之后，燃烧后的火药味久久不散。

嗅觉是一种最原始、最能唤起记忆，也是最深入体内的感觉。在你说出气味的成份之前，必须先把它吸入体内。触觉似乎只存在于被触及的物体上，而气味好像不在被触及的物体上，而是在人的感官里。换句话说，大脑是在鼻子里直接接触并且试图辨别外部世界。也就是说，在其它

感觉器官还无能为力的时候，是鼻子首先站到了自己的岗位上。因此，说鼻子为我们开路，也不为过。

神经物理学家沃尔特·弗里曼关于嗅觉的机制作过一个有趣的实验。他在兔子嗅一种气味时测量了从兔子的嗅觉小球发出的脑电波。他通过研究表明：在让兔子第一次嗅某种气味时，它的嗅觉小球发出的脑电波相当杂乱无章；嗅过几次之后，脑电波便出现有规律的图形；此后，那种气味总能使神经细胞的活动产生这一图形——这就是认知的标记。他的基本思想是：嗅觉神经细胞——也许所有的感觉神经细胞——只要一受刺激，就会即兴地奏出一个脑电波的曲子；以后一有这个提示，便奏出这一主旋律。

迈克尔·拉塞尔关于婴儿嗅觉记忆也做过一个有意思的实验。他通过实验表明：虽然一个出生两天的婴儿对在其母亲乳罩里放了三个小时的一块棉垫毫无反应，但是大多数出生六个星期的受试婴儿嗅到在自己的母亲身上放过的棉垫时就会做吮吸动作，而对放在一个陌生的哺乳妇女身上的棉垫却毫无反应。

我们不常追寻气味，而只是记忆气味。气味与记忆之间的密切关系并非巧合，没有这层关系，气味会变得毫无意义。你辨别不出从没有闻过的气味，就象认不出从没见过的面孔一样。值

得注意的是：在记忆气味的同时，也记忆了别的事物。我们是否能把嗅觉记忆的这一特点利用起来，用以提高学习新知识的效率。也许校园里的丁香花对我们记忆英语单词还起了一定的作用呢！

感官的延伸与萎缩

随着文明的发展，人类已经为延伸或扩展自己的感觉，设计了许多仪器和装置。

先说说改善我们视觉器官的仪器吧。

利用透镜、三棱镜以及曲面或平面反光镜，可使光线偏离它原来的直线行程。把精确地做成一定形状的光学组件综合在一起，光线就可以按照我们的意图发生弯折或反射，从而使眼效率或观看的范围相应地得到提高。我们用光学仪器观看远距离的物体、从舞台演员到外层空间的行星，都比用肉眼看清楚得多。显微镜使我们有可能看见活细胞的核以及比肉眼所能看到的最小东西还要小1400倍的物体。

照相机对于保持我们的视觉记忆，以及为我们取得统一视觉，都有很大的价值。

摄影机有时还能提供人眼所不易看到的镜头，有些物体运动得太快，眼睛看不清楚，而摄

影机却可以把它清晰地拍摄下来。

X—射线照片能使我们见到人体内部的骨骼。用电子显微镜照相，能将物体放大到96 000倍，这样，我们就可以“观察”到尺寸小至 5×10^{-10} 米的物体。

再说说提高我们的触觉能力的仪器吧。应用我们的触觉去辨别温度，只能局限于约 -5°C 到 60°C 之间的范围内，而且是很不可靠的。你是否做过这样的试验？先把一只手（比如右手）伸进热水里，把另一只手伸进冷水里，然后把两只手都伸进一盆温水中。你的右手给大脑送去的信息是感觉盆里的水是冷的；而同时你的左手送出的信息却感觉水是热的。然而，有了温度计，就能测得比较准确的温度。为什么只是说“比较准确”呢？因为温度计也有个吸热、放热的问题。

总之，通过种种仪器和装置，使我们的感官得到了延伸。不仅如此，视觉、听觉、嗅觉、味觉和肤觉作为知觉，再加上言语知觉，在人类发展的历史长河中，随着经验的增加，都有所提高。

然而，视觉、听觉、嗅觉、味觉和肤觉作为感觉，则在许多方面有下降的趋势。由于日光灯、霓虹灯和电视机的发明，视力有下降的趋势；由于噪音的增加，听力有下降的趋势；由于对某种味道的偏好，味觉能力在减弱；由于较少

使用嗅觉和空气的污染，嗅觉能力在下降；至于肤觉，由于种种保护条件的加强，也有减弱的趋势。然而，这里所说的“提高”和“下降”都很笼统。很不确切，应该用计量方法深刻地揭示其本质。

最近发展起来一门新的学科，叫做：计量历史学。它既采用了计量分析的基本方法，又采用了许多数理统计的方法。以计量历史学的手法对当今人们的感觉和知觉作一番定量的评价和数量的分析，并且定时定点跟踪测试，真是一项有意义的工作。

通过这样一番剖析，将会得到启示，使我们知道：我们为自己的感官做了些什么？我们应该为自己的感官做些什么？千万不要忘了：它们是为我们获取思维材料的基本手段。

思维营养

感官、知觉不仅能为我们提供直接经验、思维的基本材料，而且能以多种方式从多方面为我们提供丰富多彩的思维营养。

思维着的大脑，除了需要一定的物质营养外，还需要一定的思维营养。搞自然科学的应该学点音乐、美术，至少应该使自己具备一点音乐

欣赏和美术欣赏的能力。搞文字艺术的应该学点数学，至少应该懂得数学是一门什么样的学科。致力于逻辑思维的应该培养自己形象思维的能力，读读唐诗、宋词，听听音乐，致力于形象思维的应该受些逻辑思维的训练：看侦探小说，做数学游戏。

我曾设想：关于思维营养能否找出一些规律性的东西？能否为具有不同文化水平，从事不同工作的人制定不同的思维营养“处方”？

让我们以数学教师为例来谈这个问题。数学教师们充分地意识到自己的责任，在为培养学生的思维能力而努力。数学教师在教学过程中，大脑成天在思维着；该为他们的思维着的大脑添点什么思维营养呢？依我看，在这个“处方”中有几味“药”是主要的：

(1) 数学史和数学思想史：

数学是一门“历史的”学科，有它自己的“历史”。仅当我们如实地把它当作一门“历史的”学科来认识、弄清其每个重要概念的来龙去脉时，它对我们来说才成为一门有血有肉的、活生生的，具体的学科。

数学思想史研究的侧重面不大一样。数学思想史研究者所关注的不是定义、定理、方法和证明，而是数学家们的创造性思想以及产生这些创造性思想的思想。数学思想史是数学史的脉络、

数学史的灵魂。数学思想史告诉我们：数学在过去有过什么样的潮流，在当前存在什么样的趋势。有了数学思想史，我们学习和研究数学时就有了航标。

(2) 数学方法论：

它不仅告诉我们解题思路和证题思路，而且告诉我们取得解题思路和证题思路的方法。

它还要告诉我们创造和发现数学的方法，猜测的方法，以及组织、整理、构造数学的方法。

(3) 关于数学本质的探讨：

通过历史的探索，通过对历代著名数学家对数学的理解的掌握，谋求得到一个对数学的整体的、概括的理解。从这样的认识出发去看个别数学问题，常能做到“清澈见底”，把问题点透。

(4) 数学怎样成为可应用的？

弄清了这个问题，也就知道了数学被广泛应用的根据所在。从而也就为把它应用于更多方面开辟了道路。

(5) 数学游戏：

数学本来就是揭示客观世界奥秘的一种工具，数学本来就是很有趣的，而数学游戏向我们展示的正是其十分有趣的那个侧面。爱因斯坦说得好：“兴趣是最好的导师。”实际上，数学游戏是使学生对数学发生兴趣的重要渠道。

思维营 “处方” 还有个重要的“药引子”

呢，那就是：思维的主动性。真正的思维营养，只能在自己的主动的思维过程中取得；因为主动的思维和被动的思维，在大脑中留下的痕迹的深度是迥然不同的。

文明的结构

思维的最大功绩是创造了整个文明。试想：没有能思维、有思维能力的人，有什么文明可言。

文明，包括精神文明和物质文明。物质文明是精神文明的物质载体，同时又对精神文明的发展起促进作用。精神文明，在一定的意义上，是人类思维活动的产物，同时又是我们的思维营养取之不尽的源泉。

精神文明是有结构的。精神文明的结构指的是：（1）精神文明包括伦理道德、文学艺术、科学技术、政治、经济、法律、哲学，等等。这些都是它的组成部分。（2）其各个组成部分在整个文明中各有其特殊的、具体的地位。（3）其各个组成部分之间的相互关系也是具体的。——这“组成”、“地位”和“关系”就是精神文明的结构。

文明的结构是不断变化的。例如，在我国历

史上，史学曾占有很重要的位置；《二十四史》的编纂与出版就能说明这一点。而在古希腊，数学则占有重要的位置。而今天，科学技术普遍地占有最为重要的位置。正因为如此，文明具有民族性和时代性，具体的文明总是属于一定的民族和一定的时代。

我们生活在当代的每个人都应该力求自己的知识的结构与当代的文明结构相适应。

知识的结构

许多人由小学到中学，由中学到大学，在不断地寻求知识，可是对自己已经具备什么样的知识结构和应该具备什么样的知识结构却考虑甚少，至于自己的知识结构是否与当代文明的结构相衬的问题，就更不会提到议事日程上了。

姑且以理科大学生的知识结构为例，说说自己的看法。它应该包括：

(1) 专业知识：科学发展得异常迅速，分支也越来越多。我们学的专业知识，既要符合该门学科的本质特征，又要符合该门学科发展的潮流和趋势。由于任何一门学科的内容都相当庞杂，我们更加要注意避免“只见树木，不见森林”的弊病；一方面要有一定的基础，另一方面又要有

一定的深度，千万不要过于求全而“不求甚解”。

(2) 对本学科的整体理解：为了取得对本学科的全局的、整体的、概括的，然而又较为深刻的了解，要学习学科史和学科方法论。读了学科史，才能理解其脉络，读了学科方法论，才能掌握其框架；二者在手，该学科才变得易于把握、易于理解。

(3) 摸清当代科学技术发展的特点：有了这样的背景知识，才能认识本学科的意义和作用，才知道怎样为本学科的发展创造条件。

(4) 本学科与整个文明的关系：要看到整个文明对本学科的发展的影响和本学科对整个文明发展的作用；还要看到：在单个人身上，文明的素养和专业水平的相互依存、相互促进的关系。因为，只有这样，专业知识才能得到最好的发展。

个人的知识结构是一个值得考虑的问题。家庭的知识结构，更是一个应该重视而常被忽视的问题。许多家长，恨子不成龙，然而，从来没有想到在改善自己的知识结构、在改善家庭的知识结构上下功夫，没有为儿女成才创造相应的环境条件。

事实上，许多科学家的成就能够在其家庭的知识结构上找到原因，许多青少年犯罪也能在其

家庭的知识结构上找到原因。真应该对家庭知识结构作一番普遍调查，从中找出一些规律性的东西，并且探讨一下什么是最佳结构的问题，然后用以指导我们的生活和工作。

当代科学技术发展的特点

我这里说的是科学技术“发展”的特点，而不是“科学技术”的特点。用物理学的术语来说，考虑的是物体的“运动”，而不是物体本身。然而，在讲述和研究物体的运动时，不能把物体的状态完全置之不顾。为什么要说刚体运动呢？因为“刚体”是研究其运动的必要前提。由此可以引出这样的结论：在谈论科学技术的发展时，科学技术本身的状况是其必要前提。

当代科学技术的发展有如下特点：

第一，科学技术发展得异常迅速。每门学科的分支越来越多，有如雨后春笋。使每门学科的分支越来越多的原因是多方面的：公理学、证明论的建立来自数学本身；运筹学、策略论的创立则主要来自数学之外。学科之间相互渗透的现象日益增多，是一个相当重要的原因（“渗透”这个词是从物理学、化学和生物学中借过来的。溶液与纯溶剂在相同的外压下由半透膜隔开时，纯

溶剂能通过半透膜使溶液变淡的现象，被称做“渗透”。由半透膜隔开的有浓度差别的同种溶液，其溶剂也能由低浓度溶液透入高浓度溶液。谷类浸于水中会膨胀就是由于水通过谷类表皮（渗透作用）。甲学科向乙学科渗透，实际上是：在乙学科中明确地提出了甲学科的问题，并且能用甲学科的方法解决。生物数学的建立，就是数学向生物学渗透，就是在生物学中提出了数学问题，并且能用数学方法解决。学科之间的相互渗透，是以有关的两门（或多门）学科的发展为前提的。科学有其发展的潮流和趋势，有的学科肢解得越来越细，另一方面，又在形成一些综合性学科。技术有其发展的潮流和趋势，许多技术植根于深层的理论；由此向我们启示：在理论的深层有取之不尽的发展技术的源泉。每门学科、每项技术在其发展过程中，都有过若干重大转折。（这是耐人深思的！数学自代数学的解放和几何学的解放之后，显得更加朝气蓬勃。化学、自量子力学被引入以来，出现了崭新的面貌）。每门学科、每项技术，在当代，又都有其独特的发展的潮流和趋势。（作为实验科学的化学有向计算技术靠拢的趋势。这是多么有趣啊！）冯·诺伊曼认为数学“存在一种严重的危险，即这门学科将沿着阻力最小的途径发展，使远离水源的小流又分散成许多无足轻重的支流，使这个学科变成大

量被搞混乱的琐碎枝节和错综复杂的末事。换句话说，在距离本源很远很远的地方，或者在多次‘抽象的’近亲繁殖之后，一门数学学科就有退化的危险。起初，风格通常是古典的；一旦它显示巴洛克式*的迹象，危险信号就发出来了。”冯·诺伊曼的这番话不仅对数学适用，对其它学科、对于技术也是适用的。

值得我们深思的，是：a) 说科学发展得迅速，究竟以什么来衡量？有的人以文献的数目来衡量，是否合适？有没有更加合适的标准？b) 说某学科建立了一个新的分支，以什么为标志？c) 以这样的标准和标志对科学发展的历史和现状作出尽可能精细的描述。d) 两门（或多门）学科在具备了什么条件后才能相互渗透？相互渗透的具体机制是怎样的？e) 在弄清某门学科发展的主流之后，用以评价具体研究方向的得失。f) 正因为科学技术发展得迅速，差之毫厘，失之千里，为科学技术把舵就更加难也更加重要。对于其困难和重要的程度，我们是否有足够的认识。g) 说某学科（或某技术）是巴洛克式的，标志是什么？目前，在哪里已经有了危险的信号，在哪里已经到了该悬崖勒马的紧急关头？

第二，科学转化为技术、技术投入生产的时间在缩短。甚至，科学与技术之间的界限很难划指过分讲究雕琢的、奇特的艺术风格。

分。新技术转化为陈旧技术的时间也在缩短。

值得我们深思的是：a) 由科学转化为技术，直到投入生产，应该以什么为标志？在有了统一的衡量标准之后，再用以衡量科学技术的近现代发展，计算其转化所需时间，计算这时间以什么样的比率在缩短？b) 当某门学科、某项技术在别人手中时，如何认准（或预测）这种转变？因为，在一定的意义上，这是由“无价”转化为“有价”的关键时刻。是否抓住了这个有利时机是至关重要的。50年代我国导弹技术的发展，凭的就是几乎是“无价”的（与专利相比，便宜得多）科技情报资料；因而干了一桩无本万利的买卖。当某门科学、某项技术在自己手中时，又该考虑如何促使其转化时间进一步缩短。（50年代，我们没有将转炉炼钢的技术及时投入生产，是一个很大的失策。为了能使转化时间缩短的杠杆掌握在自己的手中，有必要对以往阻碍这种时间缩短从而失去了良好时机的诸因素作一番认真的考察。c) 对“新技术”和“陈旧技术”也不能只是笼统地说，要给出鉴定标志；然后，再以这统一的衡量标准去评估现代、近代的技术发展史；并且，用以预测我们手中的技术的变化趋势，及时（而且选择最佳时机）予以更新。有的技术似新已旧，还没有普遍应用，就有了过时的趋势，有的技术似旧仍新，虽已应用许久，仍有发

展前途。像前不久才买回来的计算机“苹果 2”已经失去了其先进的地位而三十多年前就开始应用的转炉炼钢，至今却仍有挖掘潜力。在这里，把握好“新”与“旧”的真实涵义，可是件难事！

第三，在所有的科学技术中有这样几项技术（或事业）能够把物质直接转化为精神，并从而推动整个科学技术的发展，即：造纸、印刷、图书、出版、发行、情报。

值得我们深思的是：a) 制定一些能代表这几项事业发展的指标，比如：人均文化用纸〔（纸产量 - 工业用纸 - 生活用纸）÷ 人数〕；人均图书字数，尤其是人均科技图书字数；情报检索设备总数及其利用率等。然后，用以进行文明的比较：看某国（或某民族）的这些指标处于前列的时间，及该时期其科学技术在国际上的地位。b) 从全世界各民族的文明史中找出这些指标与其科学技术水平之间的函数关系。c) 在这几项事业中，经济效益与社会效益的差别是异常显著的。同时，应该看到，从长远看，它们都能取得最大的经济效益。

第四，技术与贸易的关系日益密切，甚至可以说，对贸易双方商品的技术内容的多寡应该作出衡量标准，因为这是判断谁赚谁赔的关键。技术与金融的关系也日益密切：技术引进，需要贷款，这贷款是以什么方式得到的，很重要，技术

与经济的相互关系，更是有目共睹的：技术引进，一般说，对经济的发展有所促进，然而，有时也会促退；这方面，颇有些触目惊心的例子。

值得我们深思的是：a) 如何为商品的技术内容制定一个统一的衡量标准？如何用以衡量贸易双方的赔赚？b) 如果说“不‘引进’的引进”（如我国的导弹技术）是上策“‘引进，为了输出’”（如日本从美国输入又向美国输出的钹钢片）和“‘引进，的引进’”（如我国近年引进的冶金工业中自动控制技术）是中策，“‘引进，的不引进’”（如我国近年引进的一些未产生实效的技术项目）是下策；可以以此种方式对我国近十年来的重大引进项目作一番认真的分析与统计。c) 再进一步考虑：能采取上策靠的是什么？能采取中策靠的是什么？采取下策的前因与后果，以及今后的防止办法。d) 把金融关系（合资的方式、贷款的方式等）考虑进去，讨论我们已有的重大决策。e) 特别是，对技术引进使经济退步的典型事例要认真剖析。

第五，文明给技术盖上烙印，文明也给技术的发展盖上烙印。文明对技术的影响是深层结构上的影响，常常不是短时间能够显现出来的。要想让技术持续、稳定的发展，就要在文明的素质、教育的质量上狠下功夫。文明是有结构的，文明的结构是不断变化的，文明既具有民族性又具

时代性：这些是我们对文明的基本认识；我们必须从这些基本认识出发考虑科学技术的发展。某些先进国家的“工业教育”由于过于狭窄，有点后劲不足，已经对工业的发展起到了限制的作用。我国的“高考指挥棒”培养出一些高分低能的畸胎，已经对整个文明的素质起到了限制的作用，这些都是始料未及的。另一方面，实用技术与知性技术有个配套问题，知性技术本身也有个配套问题，应该以此为基础弄清技术与文明的关系。由于我们对此关系认识不足，盲目地套用托夫勒之流的“浪潮”、“趋势”的观点，使我们在经济上蒙受了巨大损失。

值得我们深思的是：a) 有了深厚的文明基础，技术才有持续发展的动力，否则，只能是零买零卖。应该全盘考虑：如何把文明对技术在深层结构上的影响数量化，并用以衡量当代各国的这种影响？b) 对近现代忽视这种关系的前因与后果作一番认真的剖析，从中吸取教训，并采取措施防患于未然。

第六，科学技术的社会功能（包括正效果和负效果）日益显著；我们对科学技术的社会功能则认识得很不够。

值得我们深思的是：a) 如何把科学技术的社会功能数量化？b) 用这种较为客观的标准去评估近现代的科技发展史。c) 再看我们的认识离那个

客观标准有多大距离。d)要紧的是：知道我们对科学技术的社会功能的认识的不足。

——每一门学科，每一项技术，都是思维的成果。在谋求提高我们自己的思维效率时，不能不对这些思维成果有一个宏观的认识，有一个客观的科学的评价。为此，我们必须对上述的一系列问题进行认真的思考。因为，只有这样，才能把思维能力用在该思维的地方，把劲使在刀刃上。

掌握情报信息

——延伸思维的触角

科学技术日新月异，使我们以科学技术为职业的人，越来越感到掌握信息的重要、文献检索的重要。

文献检索经历了手工检索、半机械化检索（如穿孔卡片）和电子计算机检索几个发展阶段。随着科学技术的发展，电子计算机检索将逐渐代替手工检索。

计算机应用图书文献检索的历史已有三十多年。这些年来，一些国家图书馆利用计算机进行文献检索，大约经历了三个发展时期：

(1)1954—1964年，脱机成批检索时期

这一时期主要是利用计算机建立成批检索系

统。所谓成批检索，即定期由专职检索人员根据读者的提问和要求，按批量进行检索，然后把检索结果提供给读者。由于检索时，读者不能和计算机对话，如需修改提问，就比较困难。

(2)1965—1972年，联机检索时期

联机检索就是读者可以利用终端设备，通过通线路与计算机中心连接，直接与计算机对话，进行检索，检索的结果由终端输出。联机检索由于实现了人机对话，工作富于启发性，可以及时修改检索题目，提高查准率。

(3)1976 年到现在，建立计算机网络时期

这个阶段的明显趋势是计算机与现代化通讯技术相结合，进入了文献情报 - 计算机 - 电讯三位一体的新时期。这一时期的特点是把许多计算机检索系统联接起来，形成巨大的计算机检索网络。各大型图书、情报单位的计算机，变成网络中的一个节点，每个节点又可连结很多个终端设备。依靠通讯线路，把各个节点连接起来，形成文献检索网络。读者可以利用终端设备，检索网络内任何一台计算机系统的文献资料，增加了获取全面文献资料的可能性。

近年来，除利用一般通讯线路外，还在研究和试验利用通讯卫星、有线电视来接收和传送文字、图象，实现远距离文献检索。

可是有些报纸杂志在介绍图书情报现代化的

过程中，往往对取得的成就做了过分的夸大和渲染，而对存在的问题则避而不谈，甚至把纯属于对遥远未来的预测也当成事实来宣传，以致在人们的思想上引起了混乱。譬如有的文章说国外有些地方读者已经不需要上图书馆去了，你需要什么图书资料，只要你挂一个电话或者在家里对计算机发个指令，你所需的图书资料就会马上在你家里的终端屏幕上显示出来。如果你需要文字材料，还可以通过打印机打印出来。似乎有了电子计算机屏幕就万事大吉，甚至一切印刷载体都可以取消了。在这种思想支配下，了解和掌握文献检索知识，对于图书情报人员便成为多余的事。特别是对一般读者来说，自然更没有必要了。

我们对图书情报工作的现代化和文献检索知识两者之间的关系应该有一个正确的认识。第一，在一段不太短的时间内，手工检索仍将成为读者检索文献资料的主要途径。如果读者不具备起码的文献知识，在“浩如烟海”的资料面前，要想获得自己所需的资料，无异于“大海捞针”。第二，即使图书情报工作实现了现代化，各个主要工作环节都应用上了电子计算机，仍需要一定的文献检索知识。

事实证明：充分地利用了掌握信息的手段，能收到事半功倍的效果，忘记了或不知道使用这些有效的手段，则常常干一些徒劳无功的事。例

如，据美国的一份研究报告透露，由于对政府及国际研究计划了解不够，致使研究工作重复，每年浪费二亿美元。又如，美国在实施“阿波罗登月计划”中，对阿波罗飞船的燃料箱进行压力试验时，发现甲醇会引起钛的应力腐蚀。为此付出了数以百万美元计的代价，研究解决这个问题。事后查明，早在十年前的文献中，就已指出甲醇对钛的腐蚀作用，解决这个问题的方法，只要在甲醇中加百分之二的水就行了。获得这一重要文献的代价，只需15分钟文献检索的时间，而这一分钟的检索，却可避免数百万美元重复研究的损失。

及时掌握国内外科技动态，查阅有关科技文献，在最短的时间内，以最小的代价获取最大的科研成果和经济效益的例子也不少。比如，天津畜产进出口公司地毯厂工程师王锡德，为了改变半个多世纪以来，劳动强度大，操作时间长，生产效率低的水洗地毯的传统工艺的落后面貌，到天津市人民图书馆查找有关资料，查到了国外一种化学水洗地毯的方法。回厂经过试验，劳动生产率提高四倍半。用九个月洗完了过去四年多才能洗完的地毯，为国家节约了三百八十多万元。

应该认识到：学会并且充分地利用一切有效的掌握信息的手段，实际上是延伸我们思维的触角。

话又说回来了，检索手段等等都是纯技术性的。在探寻最新、最有价值的信息时，还要有“情报意识”。这指的是：对该学科发展的潮流和趋势的认识，关于你所从事的工作的战略眼光。有了“情报意识”，就有了主心骨；有了“情报意识”，就不会捡了芝麻，丢了西瓜。

我们不能让知识爆炸之类的话吓昏了头，我们必须在科学的海洋中紧紧地把住舵、信心百倍地向目标行驶。

总之，我们要提高获取思维材料的能力，要主动地、积极地多方面吸取思维营养，还要有“情报意识”，用一切有效的手段去把握最新的信息。

三 存贮篇

记忆与理解

我们的大脑是直接使用所取得的思维材料来进行加工的吗？不。可以说，加工信息时所用的材料都是经过存贮的，尽管间或存贮的时间极为短暂。正因为如此，我们对记忆的具体机制必须予以关注。

这里我举一个例子来说明意义识记与词句识记的区别与关系。有一天在教室里，一位教师问一个学生：“你是否记得上次课所举的那句话？”这个学生满有把握地答道：“当然记得。您说的是；*Позавчера здесь сел самолет.*（前天这里降落了一架飞机）。”其实教师要学生们记住的那句话是：*Третьего дня тут приземлился аэроплан.*（两天前这儿有一架飞机着陆了）。为什么学生对教师所说的那些词一个也没有记住，全都换成了同义词呢？这是因为那个学生对教师所讲的那句话进行了信息加工，给自己创造

了一个意义映象，并把这个映象准确地印在自己的脑海里。——这件事说明了两点：（1）意义识记是对信息加工后得到的映象的识记，词句识记是对直接感知到的映象的识记；（2）意义识记保留时间较长，词句识记则保留时间很短。

有人实验，识记36个无意义音节，需要55次，才能成诵；而识记6节诗，虽有480个音节，却只要8次，就能成诵。——这说明了记忆与理解的关系何等密切！

早在1885年，德国心理学家日耳曼·艾宾豪斯在对没有理解的材料进行机械记忆和再现时，就已得出了机械识记材料遗忘曲线。他说：意义记忆的效果要比机械记忆的效果大约高25倍。

总之，理解了的东西容易记住，未理解的东西不容易记住；理解可以加深记忆。

事实上，理解有一个过程。理解之所以能加深记忆，是由于整个理解过程中，在大脑中留下了较深的痕迹。

为什么数学公式不存在遗忘的问题，而历史、地理就很容易忘呢？这是因为，数学公式需要费力去理解，那个理解过程较长，理解了也就记住了；而历史、地理是对现实的描述，易于理解，理解过程很短，也就容易忘。对于历史、地理这类易理解也易忘记的知识，加深记忆的办法有二：第一，主动地、进一步提问题，创造一个

需要理解的环境，从而引出一个理解过程；第二，甲乙二人合作，一问一答，问者提问，答者口述，从而引出一个“二脑联机”的理解过程。

无论如何，我们要在记忆与理解的关系上下功夫，要在创造理解环境、提出待理解的问题、展开理解过程上下功夫。

加深形象记忆的方法

形象对我们来说，只有一个感知的问题，几乎没有理解的问题。因此，我们必须创造另一种办法来加深印象、巩固记忆。

每当我们看到迷人的景色，总是想把它记住。尽管瞧了又瞧，可是一闭上眼睛，在记忆中留下的仅仅是淡薄的、模糊的和不完全的映象。为了加深记忆，有一种办法不妨试试：先仔细凝视景色，再闭目思考在脑海中留下的印象，然后重新凝视景色并把现在见到的与刚才脑海中的那个淡薄的、不完整的印象相比较，又再一次闭目思考在脑海中留下的印象；如此往复多次。这样，在你脑海中留下的映象将会一次比一次更加鲜明、完整、清晰。

每个人都会有这样的体会：图画、古迹、建筑物等单凭我们自己观看来识记它们要比边看

边听一位好的讲解员讲解要差得很远。在没有讲解员的情况下，自己对自己默默地作一番讲解，也是有助于记忆的。

俄国作家契诃夫具有非凡的观察力和记忆力。他只要见过一个人一次，这个人的特征他就永远不会忘记，善于用寥寥几笔把这个人刻画出来。也许契诃夫在见到那个人时，就及时地做了概括性的描述。

如果当我们见到一个需要记住的景象或形象时，能用几笔素描把它刻划出来，或者用几句话表述出来，那么，一定会在自己的脑海里留下较深的印象。

加深形象记忆的方法多得很。我在这里讲到的两个是：凝视、闭目，反复多次；和刻划或表述。

存贮与提取

存贮总是为今后的提取创造条件。波利亚在《数学的发现》一书中讲到解数学题的思路时指出：要学会调动已有的知识。事实上，许多大学问家、大政治家都能随时向自己的“智慧仓库”提取库存。战国时代，楚国的左徒屈原，“博闻强志，明于治乱，娴于辞令”，对内兴利除弊，革

新政治，对外毁纵连横，抗拒强秦，不失为一时人杰。周恩来总理记忆惊人，博古通今，思想深邃，郭沫若说他“思虑事物的周密有如水银泻地，处理问题的敏捷有如电火行空。”

如果仅仅是存贮，而不善于提取，背下多少本书，也没有多大用处。古时候有过这样的故事：东汉末年，有个叫祢衡的青年，记忆出众。他常和章陵太守黄射在一起旅游。有一次，他俩在野外读了当时著名学者蔡邕所写的碑文。黄射很喜欢蔡邕的文采，后悔没有把碑文抄下来。祢衡说：“我虽然只看了一遍，但还能记得碑文，只是石碑上已缺的两个字没法搞明白了。”说完就把碑文写了下来。黄射派人把碑文抄回来校对，果然和祢衡书写的一样。南梁时有个叫陆倕的，向人借了一部《汉书》，不幸把《五行志》四卷遗失了，他就凭记忆把原文抄写一份还给原主。经核对，写的这份居然一字不漏。今天，也有背字典的人。——这样的记忆力不可谓不惊人，可是只能单渠道检索、单渠道提取，对思维能力的提高并没有多大帮助。

怎样才能做到多渠道地提取呢？在存贮时就应为提取创造条件。在学习任何知识时应该有意地把它分成若干类，并且，把每一项新学到的知识归入某一类。这样，在提取时就有了现成的线索。

怎样才能把自己大脑里贮存的知识分为若干类呢？最好的办法是写作。当你写过某方面的论述时，很自然地就将已有的属于这方面的知识理出了个头绪；当你再写另一方面的论述时，又将那方面的知识进行了分类归纳。多方位、多角度的论述，实际上，就是为自己建立了多渠道检索的“索引”。这个“索引”是高效率利用已有知识的必要前提。

既善于存贮，又善于提取，那就既有了知识，而且知识成了活的，效率也就油然而生了。

四 载体篇

高山流水之音

列子云：“伯牙善鼓琴，钟子期善听。伯牙志在高山，钟子期曰：‘巍巍乎，若泰山’。伯牙志在流水，钟子期曰：‘洋洋乎，若江河，。伯牙所念，子期心明。伯牙曰，‘善哉，子之心与吾心同。’子期既死，伯牙绝弦，终身不复鼓也。”——这个关于高山流水之音的故事真是脍炙人口。这说明了：音乐是思维的载体，而且是一种很好的载体。

更有趣的是：不同国家的儿童在进行交往时，常常使用同一种调子的歌曲。有这样一个记载：来自三个不同国家的孩子使用“那、那、那……”这个人人熟悉的调子开玩笑。另一支许多国家都熟悉的曲子“祝你生日快乐”可能发源于美国。当一个挪威小女孩假装用沙子烤面包时，她唱“烤面包，烤面包”，一个美国小男孩玩飞机模型时他就唱“我开飞机，我开飞机”，苏联

儿童的歌词虽不同，但也是用这个调子。

正如有人所说的那样：“语言的尽头是音乐表现的地方。”音乐给人的影响，也常常是不能用文字和语言形容的：随着音乐的音响，在内心里泛起种种喜怒哀乐的感情细流；音乐的感情信号非常微妙。在我国古代乐论中，常用“以情动人”或“以声比心者也”来形容音乐的感情信息。

音乐还有训练我们多种感官协调配合的作用。比如，钢琴、风琴的视奏，两眼要同时看二行曲谱，十个指头又要灵敏地把谱中不同声部的音符，高低、长短、多寡、在诸音并发中使之协调，更要富有感情及形象。同时又由两耳非常灵敏地来校正辨别所奏曲谱与音响是否结合得密切和非常准确。可以是一心几用的实例。有时还要把十几行管弦乐总谱，在极快的速度下，临时浓缩成钢琴音响；那就更是一心几十用的实例子。

实际证明：多种感官的协调配合有助于记忆的加深与持久。不少人由于他对音乐的爱好和较高的音乐素养，使得他学习外语时不那么费力。

音乐艺术音响有一种能帮助人们大脑的思维放松而又流畅的能力，能帮助你的思维在瞬间迅速转移。华中工学院沈建军先生在课堂上用立体声音箱播放马勒的作品《升C小调第五交响乐》第四乐章小柔板，在不到两分钟的时间内把听者

引入了具有梦幻般色彩的意境，顿时促使他们在思想松弛的状态下联想翩翩；随着音乐的运动，在听者的思维中下意识地，产生了一串串长期努力没有得到的、突如其来的智慧闪光。爱因斯坦说得好：“想象力比知识更重要，因为知识是有限的，而想象力概括着世界上的一切，推动着进步，并且是知识进化的源泉。”

我国著名音乐家马思聪先生对于音乐与联想的关系有过精辟的论述。他说：“既然音乐唤起联想，于是好些作曲家想出，不如把定想确联了。于是标题音乐产生了。”“可是把标题省略了，所余的仍是纯粹音乐，仍然唤醒个人不同的联想。”“我觉得纯粹音乐胜于标题音乐，其原因在于纯粹音乐能永远发生新的联想。”

毕达哥拉斯说过：数学和音乐能净化人的灵魂。依我看，不如说：数学和音乐能提高思维的透明度。爱因斯坦拉得一手漂亮的小提琴，他曾对人说：“我的指尖有一种特殊的触觉，它们曾引导我去解决疑难。”他认为：“音乐和物理学领域里的研究工作，虽不属于同一个族系，但彼此之间却有着相同的目的——力求反映出未知的东西，在这方面它们是相辅相成的。”

既然音乐对于加深记忆、丰富联想、提高想象力有如此的作用，我们在谋求提高思维效率的时候，对于音乐怎能不予以密切的关注。

画在画之外也

在《论画六法》中，张彦远对于绘画与思想的关系有这样一段精辟的论述：“古之画或能移其形似，而尚其骨气，以形似之外求其画：此难可与俗人道也。今之画，纵得形似，而气韵不生。以气韵求其画，则形似在其间矣！”——在这里，强调指出：要在“形似之外”下功夫，要在“气韵”、“骨法”上下功夫。说得更透彻些，也就是：画在画之外也。否则，徒有匠气，而无神韵，虽“绚烂而求备”，实“错乱而无旨”，岂不可悲！

因此，我们谈论绘画之法时必须分清主次，切不可舍本逐末。具体地说，不外乎三者：一曰“思想”，二曰“表述”，三曰“技巧”。

请允许我以达·芬奇的《莫娜·丽萨》和郑板桥的《竹》为例，来讲讲人们怎样以绘画这种手法运载思想的。

在拉托列夫著的《列奥纳多·达·芬奇》中，关于《莫娜·丽萨》有这样的论述。他写道：“列奥纳多力求在自己的模特儿脸上表现出他所牢记在心的那种微笑。”“这微笑非常自然，”“它使脸上失去一切生硬的、紧张的、呆板的东

西，它把脸部变成易变的内心感受的反映；在其表情的微妙上，只有水上所起的涟漪能够和它相比。”——观察分析得够细致了。然而，这样的评述是不够的。事实上，是达·芬奇唤醒了一个对生活持冷漠态度的人的思想，使她爱生活、爱自然；然后，把那被唤醒的爱生活、爱自然的思想及时地留在画面上。

郑板桥则以他的《竹》刻划了“细细的叶，疏疏的节，雪压不垂，风吹不折”的清高气节。

岂仅如此，关于画工也有个有趣的故事。有一次，宋徽宗赵佶考画工，他用“万绿枝头红一点，动人春色不须多”两句诗为题，要画工在画面上表现出诗句的意境。很多画工只是描花染卉，缺乏构思，只有一个画工，以隐隐约约的屋檐楼角，掩映在无边如海的绿杨之中为背景，画面中心，突出着一个凭栏而立、唇红如丹的艳丽少妇。应试的画工们看了这幅画，叹服不已。

——能够象达·芬奇、郑板桥和这位画工那样以绘画这种方式运载思想的不多；但是，绘画能够作为运载思想的工具，则是事实。

承载于画中的思想和承载于酒杯中的葡萄酒不一样，那酒是谁都能喝的，而这思想却只有具有类似情感的人才能感受到。郑板桥的竹子，对于沉缅于官场的势利眼光看来，当然是没有什么意思的。类似的，同样的音乐节奏，在不同人的

脑里形成不同的形象。（深信：总有一天，会找到神经生理学上的根据。）

总之，美术是思维的一种载体。画家用他的画笔表达自己的思想。在绘画之前，必须先有思想。怎样才能做到“有思想”呢？这就要用几千年的文明丰富自己的头脑：谈论起唐诗、宋词，脍炙人口的佳句，如数家珍；伽利略、牛顿、爱因斯坦科学发现的功绩，历历在目；对历代哲学家在探求智慧之路上的辛勤工作，总能心领神会。画家通过他的画表达了他的人生哲理，观点看法和心理体验。

欣赏者就通过画家的画了解了画家的思想。

言语与语言

言语指的是人类语言机能的个人部分，是心理物理现象，它区别于作为心理社会现象的语言，即语言机能的社会部分。

言语的基本职能有三：（1）符号作用——言语中的词总是稳定地代表一定的客体与现象；（2）概括作用——言语可标示任何客体，概括其共性，形成概念；（3）交流作用——作为心理活动的言语是沟通人际交往的桥梁，也是相互影响的有效工具。

言语活动包括：言语表达过程——说话与书写；言语感觉过程——听话与阅读；言语的脑结构。传统认为，大脑皮质的特定区域主要参与了言语活动。

在儿童心理发展上，言语有一个发生和发展的过程。儿童生活的第一年，已经做了大量的语音听力练习和发音练习，并且可以理解和说出最初的几个词，这为以后的言语打下了基础。言语分为口语和书面言语，在婴、幼儿时期，以口语发展为主。到幼儿晚期，在良好的教育条件下，书面言语（主要指识字）有初步发展。

词汇是语言活动的最小单位。离开了词，就不能说话，就无法与人交往。词汇发展的数量与质量，直接影响儿童与人交往的能力。婴、幼儿词汇的发展，大体上可分为三个阶段：第一阶段：“被动的”言语活动阶段（1岁—1岁半）。第二阶段：积极的言语活动阶段（1岁半到3岁），第三阶段：词汇的数量和质量不断发展的阶段（3岁—6或7岁）。婴、幼儿掌握语法结构，也大致分为三个阶段：第一阶段（1岁3个月—1岁10个月）：开始掌握单词句，并进而掌握由两个单词组成的不完整的句子。第二阶段（1岁10个月—3岁）：掌握合乎语法范畴的一些基本类型的简单句和复合句。第三阶段（3岁—6或7岁）：实际掌握和运用各种语法范畴，能在言语中反映事

物的逻辑关系。与此同时，婴、幼儿口语表达能力也有所进展。在书面言语方面，值得注意的是：幼儿骨骼肌肉的发育很不成熟，应以读为主，不宜过早让他们写字。幼儿言语能力的培养应集中在口语方面。

语言是以语音为物质外壳，以词汇为建筑材料，以语法为结构规律而构成的体系。从认知心理学的角度来看，语言学的任务是对语言的结构及其特征作出系统的描述，而心理语言学则要阐明成人语言的这些结构和特征是如何为儿童所掌握的；以及人在说话、理解和记忆过程中是如何使用语言的，这方面的研究已取得了许多成果。

然而，有待我们去解决的问题还很多。比如，人类是否先天地存在一定的语言模式，这模式是怎样的？人为什么怎么想就怎么说？

深信：从语言这个渠道作进一步的探讨，一定会有助于对思维的把握。

语言是思维的一种载体

关于语言与思维的关系，有种种不同的见解：

“语言是思维的材料”——这是关于语言与思维的关系的一种说法。如果把它绝对化，认

为：语言和思维有不可分割的关系，不可能没有语言的思维，则似乎欠妥。不过，语言对于它所表达的思想，也确实存在“是它的材料”这样一种关系。

“语言是表达思想、交流思想的工具”——这是关于语言与思维的关系的另一种说法。语言是由表达思想、交流思想的需要产生的，这是事实。要注意的是：思想在没有被表达、被交流之前就存在。

“语言是思维的一种载体”——这种提法，我赞成。因为这意味着：在没有语言这种载体之前，先就有了思维；此其一。思维除了用语言作载体外，还可以用其它作载体；事实上，音乐、美术、舞蹈、表情都可以充当思想的载体，此其

载体有两个意思：一个是，在思维过程中，用以承载思维；另一个是，在表达思想时，用以承载思想。

关于思想的形成过程，关于思想在形成过程中与其载体的关系，可作这样一个猜想：无论是颜色、声音、图形，还是抽象概念，都是以迭加的方式运动、变化而形成的，开始淡、浅，逐渐加深，开始模糊，逐渐明确。自己思想的形成过程是如此；对他人思想的理解过程，同样如此。

粗略地说，思维是一个过程：在最初阶段，语言还不能介入，或者说，只可意会，不可言传；中间阶段，语言部分地介入，语言与思维的关系是若即若离的；最后阶段，语言与思维的关系是十分密切的，思维被语言表述得十分明确。事实上，思维的诸阶段，并不能如此截然地划分，而是交综错杂地进行的。正因为如此，似乎这样说更合适些：在思维的全过程中，总是有一部分思维漂泊不定，不受载体的约束；有一部分思维忽隐忽现，在定与不定之间；只有很少部分思维是清晰、明确的。

语言，作为思维的一种载体，在思维过程的不同阶段，与思维的关系是不一样的：这是问题的一个方面。另一方面，语言与思维的关系还有深层与浅层之分。人们发现一个人在复述一句已说过的听懂的句子时，不可能一字不差地复述出原句的语言形式，但能准确地复述原话的意思。这表明人使用词和语法，仅仅是为了获得句子的底层意义，一旦达到了理解获取了信息之后，就会把句子的表层形式从记忆中排除掉，而这些意义显然是由非语言的信息形式储存的。萨斯 1967 年的实验已经证明在人脑中语言形式和语言意义是分别保存着的，语言的深层意义在记忆中保存的时间较长，而语言的表层形式在记忆中保存的时间较短。

说语言是思维的一种载体，意思是：语言有个定形的作用：放在杯子里，是杯子的形状；放在大碗里，是大碗的形状；流入大江、大河，则是大江、大河的形状。不过语言和杯子或碗不一样，它与水不是完全可类比的。某语言一旦用来承载了某种思想，它也就与该思想有了不解之缘，有了相互依存的关系。这语言也就凝聚上了丰富的思想。

语言之所以能把思维承载着传递过去，我用现在的语言表达现在的思想之所以能被你理解，是由于你听过别人用类似的语言表达类似的思想，一句话，是由于“旧瓶装新酒”。如果我自始至终都用的是生造的词汇，那你是怎样也听不懂的。

仅仅把语言作为思维的一种载体，从这个侧面来探讨语言与思维的关系，课题就多得很，内容就十分丰富，大有“山阴道上，应接不暇”之概。

思想—语言—文字

思想，是思维的“凝固”，思维的“结晶”，或者说，是思维的“最终产品”。说某人的思想混乱，那是针对“凝固”了的思维而言的；说某

哲学家的思想如何精辟，那是针对其思维的“结晶”而言。

语言是为了交流思想而产生的。在人类发展的过程中，先有思想，后有用来交流思想的语言；在个人成长（从幼年到成年）的过程中，同样如此。在语言发展的不同阶段，它所能表达的思想不一样：原始比较粗浅，随后逐渐深刻；幼儿比较简单，成年逐渐复杂。几乎每一位科学家，每一位文学家，都向人类语言中注入了新的词汇。从这个意义上讲，欧几里得、莎士比亚、李白和欧阳修，都是语言大师。

对语言的理解离不开语境。在把语言放到相应的语境中去理解时，显得丰富多采。但是，也正因为如此，语言一旦离开了它所处的语境，就变得难以理解。

如果说语言对思维起了定形的作用，文字就进一步使之定形。文字既可以用来表达思想，又可以反过来影响人的思维。象形文字和拼音文字这两种文字给予人的印象是不一样的。中国人以象形文字为第一文字，也许在思维能力的提高上得到了某些帮助。

著名德国哲学家恩斯特·卡西尔（1874—1945）认为：“符号化的思维和符号化的行为是人类生活中最富于代表性的特征，并且人类文化的全部发展都依赖于这些条件。所以说，我们应

当把人定义为符号的动物。”——虽然这段话有些夸张，还是值得我们深思的。

语言、文字、符号，比起丰富多采的思想来，有一定的局限性；这是不容忽视的。然而，它们又都有自己的长处。有时，浓缩的语言，简练的文字，象征性的符号，竟能够表达非常深刻的思想。“醉翁之意不在酒”所表达的岂止是字面上的意思！

思维—思想—语言—文字—符号是一条清晰的脉络。弄清这个链条上的诸环节、诸关系，将有助于我们对思维载体的认识。

写与想

文章是“写”出来的，还是“想”出来的？对于这个问题，有两个不同的答案。

“常说‘写文章’，没听说过‘想文章’，文章当然是写出来的！”——有不少同学理直气壮地这样答复。正因为如此，他们在读文章时，也总是在琢磨读者的写法上下功夫，看作者用了哪些华丽的词藻，选了哪些美妙的句子，并且，十分认真、十分仔细地摘录下来。“大块文章不就是用这些‘砖瓦，砌成的吗？待我把‘砖瓦，备齐了，我也能写大块文章”。——这就是他们

的认识。当他们认为自己已经熟记了相当数量的词汇和句子，可还是写不出好文章时，就只好喟然长叹了。

其实，每一篇脍炙人口的文章都是想出来的。“文以载道”，文章是用来表达思想的。“巧妇难为无米之炊”。只是在作者有了活生生的思想、新颖的思想、引人入胜的思想的时候，才有可能写出好文章。对于那丰富多采的思想来说，表达它的词汇和句子，相对地处于次要的位置。

如果说考试时不命题作文不易比较优劣，那么，平时也练习命题作文，就未免“南其辕而北其辙”了！因为，命题作文就等于：让学生想老师之所想。用这种方式对于提高学生的思维能力有多大帮助，值得考虑。我认为：应该让学生在命题上下功夫。当学生们感到：有许多事值得写，许多思想在脑海里跃跃欲试，或多或少体会到了意在笔先的滋味时，即使暂时写的文章还不大漂亮，但可以预期，在不久的将来会写出好文章来的。

我为自己设计了写作的步骤：

第一，选题、构思、列提纲，要想想有什么可说的，该先说什么后说什么，要通过大脑的思维活动使之条理化。

第二，一气呵成。这时千万不要看参考书，

怕的是让它们搅乱自己的思想。有话则长，无话则短。不要眼高手低。这时，最重要的是：毫不遗漏地把思想表达出来。更不要让个别词汇的选择耽搁了自己跟踪思维进程的速度。所以说，要一气呵成。

第三，冷处理。在有了初稿之后，至少要经过十天半个月的冷处理。在这段时间内，不仅在抽屉里有一份写在纸上的草稿，而且，在大脑的“磁盒”里也放着这份草稿。在脑子里的那份草稿，在与别人交流思想的过程中，会不断自行修改。（多妙啊！根本用不着橡皮。）

第四，认真修改。这时可以把所有能找到的资料都摆在桌子上，因为自己有了定盘星、主心骨，那些资料已经不可能搅乱自己的思想了。我们不但不会让它们牵着自己的鼻子走，而且能灵活地把它们牵进自己的主题。

最要注意的是：“想”与“写”二者的位置关系。你想要写好文章吗，就必须既能自由驰骋地遐想，又会全神贯注地凝思。

千年的莲子能发芽

“千年的莲子发了芽！”这事发生在二十世纪五十年代，发生在大连金县。新的土壤，新的气

候，使千年古莲子发出新的芽，结出新的果。保存这粒莲子的长者，也许未曾料到会如此，然而这毕竟是一个惊动世界的现实。于是，我领悟到一个道理：藏在书库深处的千百种图书，不正是等待发芽的莲子吗！

书库里装满了书，书里面记载着作者的思想。在哲学著作中记载着哲学家的思想，在科学著作中记载着科学家的思想。在一本著作中不仅记载着该作者的思想，还记载着作者借用的其他学者的思想，也就是说，还记载着他的先驱者的思想。比如说，在一本《养猪学》中，就不仅记载着该作者的思想，还记载着在养猪业上作过贡献的许多平民百姓的思想。

虽然旧纸页已经微微发黄，然而它所承载的思想，还是那么新鲜、豁亮。有笛卡儿的，有牛顿的，还有许多其他思想家的思想。我们不仅要读柏拉图的《对话》，而且要和他本人对话；不仅要研究伽利略的《对话》，而且要和他本人畅谈。当那些思想遇到了合适的土壤，一定会发扬光大。

为什么怎样想就怎样做

当我想喝水时，我的右手就伸向左前方去取

茶杯，而不是把右手伸向脊背后或者做什么别的动作；这动作为什么能如此地准确无误？始终是个谜。

在人类执行某种动作时，脑袋中发出了什么样的指示；这个疑问困扰了千百年来⁷的许多学者。现在，神经生理学家和生物物理学家，利用电脑展开了研究。

他们先构造一个模式，用以处理统计数据；然后把一只猴子脑袋中运动神经细胞运行的情况输入电脑；于是，原本杂乱无章的神经细胞的脉冲反应，显得秩序井然；最后，再把这整理后的信息，输入“电脑图象模型”。

这时，显示在我们眼前的是颇为壮观的景色，看起来象是外太空星球上发生爆炸的情景，只是烟火分布均匀、色彩鲜明悦目。科学家们，从“电脑图象模型”上似烟花向球外喷射的线条光线的分布及发生情况中，甚至能预测出猴子手臂下一步的动作，或者说出要挥指的方向。

这是个很大的突破，也为解开人脑如何控制动作之谜，奠定了可靠的基础。

科学家们认为：他们的研究成果，也可能适用于预测头部及眼球的运动方向。我曾设想：如果它们也能适用于预测舌头和嘴唇运动的方向，该多好啊！从言语的动作到语言，再到思维，也许是探测思维的一条途径。

思维的诸载体

语言、音乐、美术、舞蹈、表情都是思维的载体。它们从不同的侧面体现思维。

就以表情来说吧！仅以对我的思想印象最深的表情谈谈自己的感受：

有一次，我把一个学期的内容，浓缩到两个小时内，讲的是我最喜欢的话题，课堂上，静悄悄，……，然而，从学生的表情看到理解和舒心；他们的表情又反过来感染了我，使我的思想更加活跃。课后，有几位同学向我诉说他们的体会，用了不少话语。那些几乎都忘记了，然而，那次课堂上的气氛（实际上指的是整体的表情）却长时间地滋润着我的心田。

处于襁褓中的婴儿，不会说话，你怎么察觉他的思想呢？只能从表情。人在生命垂危之际，已经不会说话，你怎么察觉他的思想呢？也只能从表情。说某人会用眼睛说话，那用眼睛说的话是很难用语言代替的。——表情所承载的思想委实有其奇特之处。

使用各种思维载体的能力，又有层次之分。幼儿园的孩子们唱的歌和贝多芬的交响乐，显然属于不同的层次。

不同层次的各种思维载体，又能相互配合。
歌剧不就是音乐、舞蹈和表情的配合吗？

思维好比交响乐，使用不同层次的各种思维载体好比钢琴手，前者是内在的，后者是外在的。内在的知音是通过外在的共振来实现的。抒发自己的感情，置于交响乐中，得到整体的承认，就是最大的享受。

另一方面，这还是有实效的。如果我们具备使用不同层次的各种思维载体的能力，而且能以多种方式灵活地使用它们，我们就能够在任何时刻将我们的思维深入到任何问题的任何层次上。

五 逻辑篇

逻辑的真实涵义

语言是一种模式。语言实际上是由言词组成的框架。我们使用某种语言，实际上就是从该种语言的框架出发看世界。

逻辑也是一种模式。逻辑实际上是由逻辑关系组成的框架。我们使用某种逻辑，实际上就是从该种思维框架出发看世界。

语言的基本框架，是由人类历史发展过程决定的，一定程度上，是先天的：现代语言学对此已经找到一些证据。

逻辑的基本框架，同样是由人类历史发展过程决定的，一定程度上，是先天的。认知心理学对此已经给出过一些证明。

从原始人到现代人，逻辑这个思维框架在逐步进展，从幼儿到成年，逻辑这个思维框架也在逐步进展。既有先天的粗坯为基础，又有后天的修补润色。

逻辑学是一门学问，是对逻辑的认识。只要承认认识的局限性，就应该承认逻辑学的局限性。人不是先学会了“消化学”才会消化的，也不是先学会了“逻辑学”才会思维的。用有局限性的逻辑学去限制丰富多采的思维，是不恰当的。

逻辑的发展

逻辑，在这里应该理解为，人类的思维框架。要讲这个问题必须从原始思维讲起。“原始思维”，顾名思义，指的是原始人的思维。研究它有两个障碍：第一，严格说来，关于原始人，我们几乎是一无所知的；第二，那时候还没有语言的记录，即使有，我们也难“破译”，探测思维的途径很难找到。如果承认我们关于原始思维的论述，仅仅是对比原始人迟很久的石器时代的人的种种猜测的汇集，那我就比较赞成朱长超同志的看法。他在《人类思维历史进程初探》一文中指出：

(1)人类思维是不断由具体向概括发展的。

原始思维缺乏概括性，从语言看，原始民族的语言缺乏概括性的词，表明具体事物、具体动作的词却很多。例如，在澳大利亚的阿兰达语

中，表示各种蜥蜴的词，不下九个，却没有笼统地表示蜥蜴的词；有七个表示各种鹦鹉的词，却没有笼统表示鹦鹉的词。在克拉马特族语言中，有八种动词表示捕捉，十六种动词表示分开，十二种动词表示洗澡，但缺乏表示一般意义的捕捉、分开、洗澡的动词。

(2) 人类思维是由形象向抽象方向发展的。

古代人抽象能力比较低，抽象概念相当少。许多原始民族的形容词、数词十分贫乏。塔斯马尼亚人没有热、冷、软、硬等形容词，只能用“象火一样”，“象水一样”，“象兽皮一样”，“象石头一样”来表示。加拿大西部卡利埃族的语言中，三件东西、三个地方、三种办法，使用的是不同的词，没有纯粹代表三的数词。

今天高度概括和抽象的思维，是思维历史发展的结果。事实上，许多哲学家和科学家的思维，在概括和抽象方面，才达到了炉火纯青的地步。

逻辑，在个人的发育、成长的过程中，也是发展的。按理说，这比原始思维好研究多了。可是，这里也存在两个障碍：第一，人一生下来就在社会中，就处于一定的社会关系中，这无疑会对他（她）的思维产生影响。正因为如此，一般地谈论人的思维的发展，是不现实的。第二，不管进行的对比实验如何客观，我们对于实验的设计

和解释还是出于我们对思维某种理解。正因为如此，谈论人的一般思维的发展，是不可能的。如果把承认这两个障碍当作前提，许多关于儿童心理的书还是可以参考的。例如，在一本谈儿童心理发展的书上说：“学龄前儿童的思维以具体形象思维为主，而青少年期学生的思维则以抽象逻辑思维为主”。

看来，个人的思维发展和人类的思维发展还是很相近的。

逻辑学的发展

逻辑学是我们人对逻辑的认识，已如上述。关于逻辑学的历史，我想以几位著名思想家的论述和工作为标志：

赫拉克利特（鼎盛年约在公元前504—501年）认为：世界是物质的、永恒的，是不断地运动、变化和发展着的；世界不仅是一个永恒运行不息的物质世界，而且还遵循着一定的普遍的、必然的客观规律。赫拉克利特把这种普遍的、必然的客观规律叫做逻各斯（logos）。他说，万物都有自己的逻各斯，人的思维必须遵守这个逻各斯。

希波克拉底（希俄斯人，大约公元前440年），是第一部《原本》的作者。（“原本”一词的意

义是说，它是一些主要的命题。)

亚里士多德(公元前384—322年)，是形式逻辑的创始人。他在总结、概括当时各门科学成果的基础上，吸收了先哲们的个别的逻辑思想、逻辑学说和各种逻辑方法，在西方建立了第一个逻辑科学体系。在他的逻辑论著中有关于范畴和概念的理论，关于命题(或判断)的学说，逻辑规律论，以三段论为中心内容的关于推理的学说，模态三段论，归纳理论和关于论证和反驳的学说。

欧几里得(生活于公元前300年前后)以他的十三卷《几何原本》闻名于世。这部杰出的著作完全取代了所有以前数学原理之类的书。除了圣经之外，没有任何著作像它这样被广泛地使用和研究，并且，没有别的著作对科学思想有如此巨大的影响。虽然这部著作的缺点早已为一些数学家所察觉，还是应该肯定：这部著作的主要功绩在于对命题的巧妙选择和把它排列成一个合乎逻辑的序列。

——从这里可以看到：几何学和逻辑学在相互促进中发展。甚至可以认为：逻辑学只不过是，把几何学中的几何术语扬弃掉了，留下了单纯的逻辑概念和逻辑关系。

再看看近现代逻辑的发展吧：

莱布尼茨(1646—1716)是数理逻辑的创始

人。他不仅较前人更明确地提出了数理逻辑的指导思想，而且做了不少具体工作，虽然这些还不够成熟，还是探索性的。他提出了“普遍的符号语言”和“思维演算”的设想，并且在命题形式的符号表达方面做了有意义的工作。

布尔(1815—1864)以他的《逻辑的数学分析》(1847)和《思维规律的考察》(1854)初步奠定了逻辑类代数的基础。《逻辑的数学分析》一书，其副标题为《作为演绎推论导向演算的尝试》，旨在于构设逻辑的代数演算。《思维规律的考察》提出了逻辑和概率的数学理论，其主旨在于：探讨推论借以实行的那些思维运算的根本规律。他还在这些探究的过程中提出了某些与人类思维的性质和构成有更密切的关系的观点。

罗素(1872—1970)的主要著作有《逻辑哲学之批判的解说》、《数学原则》(也称“小数学原理”)、《以类型论为基础的数理逻辑》、《数学原理》(又称“大数学原理”，与怀特海合著)、《数理哲学导论》等。他主张用逻辑来定义一切数学的概念和法则，而且遵循逻辑的公理和规则来推导出数学的定理。他还认为，逻辑与数学并没有严格的界限，逻辑和数学是相同的；逻辑与数学紧密关联，很难说逻辑在何处终止，数学从何处开始。因此，他考虑过数学逻辑

化的计划。

——从这里可以看到，数学和逻辑学是怎样相辅相成的。

逻辑学的新领域，在二十世纪以来，如雨后春笋一般层出不穷。二十世纪三十年代，人们开始探讨三值，以至于多值逻辑系统，六十年代以来，在模态逻辑方面有新进展，近年来，新的逻辑系统相继提出，如近似推理方法、合情推理方法、非单调逻辑、非演绎逻辑、认识逻辑等。

——逻辑学有“跟踪思维”的倾向。看来，逻辑学，打破其局限性，去跟踪丰富多采的思维，势在必行。

我们必须清醒地认识到：逻辑学，对它所研究的广泛而又深刻的课题来说，还只处在婴儿阶段。

然而从逻辑的真实涵义、逻辑及逻辑学的历史发展和逻辑学的研究入手，探讨思维的规律，是摸清自己思维的底细、把握自己的思维的一条重要途径。

六 软件篇

思维方式

人们常从特定的角度、从特定的思维框架出发看世界，我们说，这是思维方式不同。思维方式有种种划分法：

(1)每个民族都有自己特有的思维方式，而且在不同时代有不同的思维方式。古代印度的数学家和古希腊的数学家所关心的问题和考虑问题的方法都有显著差异。首先，搞数学的印度人原来把他们自己当作天文学家，这样，印度数学多半只充当天文学的“侍女”，而对希腊人来说，数学则独立存在，并且是为了它本身而进行研究的。其次，由于种姓制度，在印度，数学研究几乎全属于僧侣，在希腊，数学的大门对任何一个认真研究它的人都是敞开的。还有印度人是有造诣的计算家，却是拙劣的几何学者；希腊人在几何学方面十分出色，而对计算工作不那么认真。甚至印度三角学（在这方面，它们是有贡献的）

实质上属于算术；而希腊三角学则具有几何的性质。印度人用诗的形式来写作数学，并且他们的著作语言含糊而且神秘，希腊人则致力于表达清楚和逻辑性。印度数学多半是经验，很少给出证明和推导；希腊数学的突出特征是它坚持严格的证明。印度数学缺乏鉴别能力，高质量和低质量的数学往往同时出现，而古希腊人看来具有区别高质量与低质量的能力以及保持前者、抛弃后者的天性。

关于我国古代思维方式已有许多论述，观点不一。大体上可以肯定，有如下特点：i) 重视综合，轻视分析；ii) 重视宏观，轻视微观；iii) 重视伦理，轻视知识。——其实，世界上各个民族都经过这样一个阶段。关键在于：我们中国的这个阶段比较长。

现代，美国人和日本人考虑问题的方法很不一样。有一位评论家说：美国人以极端个人主义为基础搞资本主义，日本则是孔夫子式的资本主义，把孔夫子的“温、良、恭、俭、让”五个字用到了家。

(2) 有不同信仰的人考虑问题的方式不一样。王守仁在《尊经阁记》一文中说的：“经，常道也。其在于天谓之‘命’，其赋于人谓之‘性’，其主于身谓之‘心’。心也，性也，命也，一也。”持的是儒、释（佛）、道融为一体的

观点。（儒教不算一种宗教，尚有争议，估且这么称呼它。）其实，它们各有所侧重。概括地说，儒教讲究“命”（即，天命，必然的规律），佛教讲究“性”（指灵性），道教则“性”、“命”双修。道教又分天师道和全真道两派。佛教，自我国隋唐以来，有四大宗派，即天台、法相、华严和禅宗；此外还有三阶教、三论宗、密宗、律宗和净土宗等。

禅宗延续时间较长，影响较大。“禅”是梵语“禅那”的简称，意译为“思维修”、“静虑”、“禅定”，以思悟佛教真理、静息一切念累为主要修养方法。顾名思义，禅宗应该是以“禅”为“宗”的。其实不然，除禅宗某些先躯者曾大讲其禅法外，从它的实际创始人惠能开始，是根本反对和废弃坐禅入定那套修养方式的，“禅宗”之名，只不过是习惯上的称呼。由于它强调“直指人心，见性成佛”的说教，故又叫佛心宗或心宗，这倒有点名副其实。禅宗完全是中国独创的佛教流派；但它很重视“祖统”、“法嗣”，把梁武帝时来华的菩提达摩尊为初祖；传予慧可，称二祖，以次递传为三祖僧灿，四祖道信，五祖弘忍，以至六祖惠能（慧能）。

据传弘忍为了挑选“法嗣”以便传衣钵曾对寺内僧众举行一次测验，方法是通过作偈谈体会素衡量各人对佛法理解的深浅程度。上座兼教授

师神秀虽一时众望所归，却只写了一首被认为无悟性的偈，经弘忍评定：“未见本性，只到门外，未到门内”。神秀落选了。偈的原文是这样：

“身是菩提树，心如明镜台；时时勤拂拭，勿使惹尘埃。”

当时惠能在碓房里舂米，听一童子唱诵神秀这偈，他认为“此偈未见本性”，随即自己作了一偈，托人代书壁上：

“菩提本无树，明镜亦非台；本来无一物，何处惹尘埃？”

这偈被弘忍看上了，赞许他能“悟本性”。——从这两偈的对比，很能说明佛教禅宗的思维方式。

当然，信仰基督教和天主教的人，也都有自己的思维方式。

(3)持不同哲学观点的人有不同的思维方式。例如，“现象学”这个词在经过E.胡塞尔（1859—1938年）严格界定之后，成为一种特殊的思维方式，其基本内容在于：凭直觉对对象作理智的观察。又如，持“符号学”观点的人，在使用语言（口头语言和书面语言）交流思想时，常常把注意力引向语言本身，注意句法关系、语义关系和语用关系以及这些关系的相互关系。此外，持“公理方法”和“归约方法”观点的人，也各有其独

特的思维方式。

(4) 研究不同学科和从事不同职业的人，也常常逐渐养成自己特有的思维方式。学数学的（假如你真正学有所得的话）和学生物的，常常表现出思维方式上的差异：前者重视演绎推理，后者重视观察、重视实验。不仅如此，它们还是交综错杂、相互渗透、相辅相成的。比如在理科研究者思维中，可能就包容了有印度哲学、佛教哲学等的某方面思想。

对思维方式的上述理解，应该有助于我们认识自己思维方式的长处和短处，扬长避短。“人贵有自知之明”，也包含这样一层意思。

像科学家那样学习和思维

我们不应该仅仅是抱着科学家写的著作学习，而应该了解科学家本人学习和研究的思维。

例如，在我们学习和研究自然辩证法之前，先得问问：恩格斯是怎样学习的。恩格斯说过：花了十年，二十年的功夫，使自己在自然科学上达到脱毛、半脱毛状态；又说：历史从哪里开始，思维就应该从哪里开始。可以说，从自然科学和自然科学史入手，就是恩格斯学习和研究自然辩证法的途径，也是我们学习自然辩证法应走

的途径。

再来看贝尔纳是怎样创立科学学的。贝尔纳在1965年所作的著名讲演《在通向科学学的道路上》，是以他对科学史的深刻研究为基础的，这包括他所写的《十九世纪的科学与工业》（1953）和《历史上的科学》（1954）等。甚至可以说，贝尔纳的科学学就是奠基于科学史上的。当然，这也是我们应走之路。

类似地，要学习F.克莱因的几何思想，就要像他那样认真研究几何学史，要学习G.波利亚的数学思想，就要像他那样做各种类型的数学题，并在做完题后对它们进行认真的剖析。或者，说得更透彻些，要像F.克莱因那样做几何，像G.波利亚那样做数学。

大家知道：科学家们之所以取得其丰硕的成果是与他们的思维方法分不开的。因此，我们应该探寻他们的思维之路，并且闯出自己的路子来。比如：

毕达哥拉斯学派是怎样发现其毕氏三数公式

〔即， $m, \frac{m^2-1}{2}, \frac{m^2+1}{2}$ （这里 m 是奇数）〕的

呢？原来，这个学派对数字和图形的关系有一种特殊的理解。他们把数字想象成一些点的组合，这些点可以是星座，也可以是石头或诸如此类的其它东西。因此，由点组合而成的各种图形都有

相应的数字。通过分析图形关系，就能够了解数字的规律。上述公式的取得，主要靠的是分析正方形数的图形。——这种思维方式给毕达哥拉斯学派带来了好处，但也暴露了它的缺陷。

阿基米德对数学同科学技术的关系很关注。他先借助于力学的方法猜测某些定理，然后再给出演绎的证明。——这种思维方式大有助于他的数学研究。

通过分析帕斯卡 1623—1662 在创立和运用数学归纳法，证明算术三角形定理的过程中的思维方式，可以使我们获得一些有益的启示。首先，帕斯卡的思维方式有一个明显特点，就是从具体问题中提炼和概括一般的数学规律和方法，其次，帕斯卡之所以未能给出数学归纳法的现代形式，主要是受到当时标记方法的局限。

了解熟悉科学家们的思维方式，甚至模仿他们的思维方式固然都是重要的；然而，更要紧的还是：理清自己的思路，从自己的思路中归纳出最有效的方法。

笛卡儿的思维法则

《指导思维的法则》是笛卡儿的一篇未完成的著作。笛卡儿原计划写36节，但是实际上只写

了18节，另外3节只写了个概要。其余的很可能根本没有写。其中，开始的12节讨论对解题有用的思维方法，此后的12节讨论能直接简化为纯数学问题的“完全被理解的问题”，最后的12节本打算讨论不能直接简化为纯数学问题的“不完全被理解的问题”。这篇著作以极其精练的语言表达了颇为深刻的思想，耐人深省。为此，在这里介绍其21条法则。

法则 1。学习的目的应当是指导思维对出现的全部材料所作的可靠和正确判断进行系统的表达。

法则 2。我们的注意力只应该放在实在而明确的知识上，这些对象是我们智力所能及的。

法则 3。我们所要考查的主题不应当是别人已经想过的或自己臆测的东西，而应当是那些我们能够清楚和明显地观察到并且确实可被推论演绎的。除此，别无他法。

法则 4。为了发现真理，方法是必要的。

法则 5。方法完全在于对研究对象的整理与安排 这是发现真理思维所要遵循的方向。即把复杂的，含糊不清的命题，逐步演化归纳为比较简单的命题以同样手法，再从对绝对简单的所有定理的直觉理解出发，努力上升到其它所有命题的知识上去。

法则 6。为了把十分简单的东西从复杂的东

西中分出来，并把这些东西有条理地排列起来，就每一系列演绎而来的事实而言，我们必须注意到哪个是简单的，标出事实间的区分间隔是大的、是小的、或是相等的，以此将它们彼此分开。

法则 7。如果我们希望我们的科学臻于完善，那些在我们考虑中已经提升为目标的材料全都必须经过连续而不受干扰的思维活动，进行细密的审查；它们也必须包括在既适当又有条理的枚举细目之中。

法则 8。在所考察的那些材料中，若我们在某个序列中走到了这样一步：在我们的理解上确实不能有直觉认识，那么我们必须就此停止。我们不必再企图考察随后是什么；否则我们就会浪费许多不必要的精力。

法则 9。我们必须把注意力全部集中到最重要的和最容易掌握的事实上，而且要长时间地对它们仔细考虑，直至养成清楚而明确地考察真理的习惯。

法则 10。为获得睿智，思维应当进行练习，可以通过别人是如何发现答案的思考过程进行练习。甚至还应当系统地细察人们最不足道的发明创造，虽然这些发明创造的程序本应当得到说明或有所暗示。

法则 11。如果在我们已经直觉地意识到了若

干简单的事实真相之后，我们还希望根据它们作出推论，有效的方法就是使这些事实处于连续不受干扰的思维活动中，研究它们彼此³之间的关系，可能的话，同时清楚地抓住若干命题。因为这种方法使我们的知识更加可靠，并能大大加强我们思维能力。

法则 12。我们必须借助理解、想象、感觉和记忆，首先对简单的定理的产生明确的直觉；再把待证明的命题同我们已知道的命题加以比较，以致我们有可能认识真理；然后发现真理，并加以相互比较。这样就不会留下什么缺陷。

法则 13。一旦某个问题被完全理解了，我们就应该将它从附加在其上的概念中解脱出来，以它的最简方式来表述它，并且依靠列举，把它分解为不同的部分，以下再精细部分不用再进行分析。

法则 14。同样的法则也可运用于物体的实在广延性上。必须利用图形把这种广延置于想象的前面，这是清楚理解的最好办法。

法则 15。画这些图形并把它们展示给外部的感官往往是很有帮助的，这样才能促使我们持续不断地保持注意力集中在目标上。

法则 16。当我们遇到不需要现在就给予注意的情况时，即使这些情况对我们作结论是必需的，最好还是用高度省略的符号来表示它们，而不是

用复杂的图形来表示它们。这样做，一方面预防由于记忆的缺陷而产生的差错，另一方面防止思维的转向以免在研究其它推理时，这些材料会引起思维上的干扰。

法则 17。在一个问题提出来讨论时，我们应当采取直截了当将它考虑一遍，这样就要忽略这个问题的某些项是已知的，某些是未知的，当考虑各自独立的条目彼此之间的依存关系时，就有助于追踪它们间的正确的联系。

法则 18。为此目的，只需要有加、减、乘、除四则运算。但其中往往不用乘法和除法，这既是为了避免预料不到的复杂性，也是为了后阶段能比较容易地进行处理。

法则 19，运用这种推理方法，我们就要把未知项看成是已知的，有多少未知项就必须找出多少量值；这就是以直接的方法来处理问题。而这些〔量〕必须以两种不同的方式来表示。因为这会使得有多少未知量就能给出多少方程。

法则 20。得到这些方程之后，我们必须继续进行我们曾忽略的那些运算，同时要注意，在我们能用除法的地方决不用乘法。

法则 21。如果这类的方程有若干个，我们就必须把它们全都简化到独立的一个，也就是说，在成连比的数量值里方程的项数不能占得这么多。

“软件”这个术语是从计算机科学中借来

的。现在，不论是科学计算还是数据处理，乃至思维能力的实现，最终都要靠编制软件来完成。软件的改进与发展，大大提高了计算机的效率。我们的思维机器——大脑，何尝不需要软件！思维方式、思维方法和思维法则就是我们大脑的“软件”。

七 演算篇

要学会用数学语言思考

笛卡儿曾打算提出解题的通用方法。现在，简要介绍一下笛卡儿期望可用于所有类型问题的方案：

第一，将任何种类的问题化归为数学问题；

第二，将任何种类的数学问题化归为代数问题；

第三，将任何代数问题化归为单个方程的求解。

在笛卡儿方案的基本意图中，有些内容看起来是很正确的。但是要把这种意图付诸实施，其困难、障碍和错综复杂的情况远比笛卡儿最初热切想象的要多得多。虽然笛卡儿的方案失败了，但仍不愧为一个了不起的方案，它对科学的影响比那些偶然成功的许多微不足道的方案要大得多。

当我们“列方程”解“文字题”时，实际上

就是沿用笛卡儿的方案。其实，只不过是把用日常用语表述的问题翻译成用符号表示的代数语言。这使我联想起德国思想家哥德的话。他说：

“数学家犹如法国人：无论你对他们讲什么，他们都把它译成自己的语言，于是就成了全然不同的东西。”——这话既风趣，又给人以启示。

现在就沿用笛卡儿的叙述方式，来讲“列方程”解“文字题”的步骤：先列出其纲要，然后加以说明。

(1)首先，对问题要有很好的理解，然后把它化归为如何去确定某些未知量。

说明：把时间花在一个我们不了解的问题上是愚蠢的。所以，理解问题，弄清问题的意义和目的，是我们首要的和明摆着的任务。

在对问题有了整体的理解以后，把注意力转向其主要部分时，我们应该非常清楚地分辨出：

我们需要的是哪一种东西？（未知量）

什么是给定的或已知的？（已知量）

未知量与已知量是以何种关系并怎样相互联系起来的？（条件）

(2)以最自然的方式来考察问题，把它当作是已解决了的，并以适当的次序使所有由条件规定的未知量和已知量之间所需要保持的关系具体化。

说明：所谓“把问题当作已解决”，即设想

未知量已完全满足了问题条件的数值。因此，我们可以把未知量和已知量在某些方面同等看待，我们设想它们依条件所规定的关系彼此联系着。

(3)分划出一部分条件，根据这部分条件你可以把同一个量用两种不同的方法表示，并从而得到未知量之间的一个方程。照此做下去，最后就可把条件分成与未知量个数一样多的部分，并从而得到与未知量个数相等的一组方程。

(4)把这组方程简化为一个方程。

——这是用数学语言思考的最典型的例子。

在运筹学的发展史上起了重要作用的“运输问题”是另一个典型例子。先将此问题简述如下：

假设某产品有 m 个生产地，其产量分别为 a_1, a_2, \dots, a_m 个单位；这种产品有 n 个消费地，其需要量分别为 b_1, b_2, \dots, b_n 个单位。它的产销平衡，也就是总的生产量等于总的需要量。即

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

并且， $a_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$)， $b_j \geq 0$ ($j=1, 2, \dots, n$)

以 x_{ij} 表示从第 i 个生产地到第 j 个消费地的这种产品的运输量。则 x_{ij} 与 a, b 之间的关系可用如下表格形式表示出来：

产销平衡表

消费地	1	2	...	n	产量
生产地					
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	a_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	a_2
⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	a_m
需要量	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

以 c_{ij} 表示从第 i 个生产地到第 j 个消费地的单位产品的运输费用（或运输距离），则我们可以得到如下运价表：

运价表

消费地	1	2	...	n
生产地				
1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}
2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}
⋮	⋮	⋮	...	⋮
m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}

问怎样安排运输计划，能使总运费最低？

运输问题的数学模式可表述如下：

要求确定所有变量 x_{ij} 的数值，使得总的运输费用（或运输距离）

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \quad (\text{目标函数})$$

达到最小，并满足以下三个条件（约束条件）：

(1) 各个生产地该种产品的运出量等于其产量

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

(2) 各个消费地该种产品的到达量等于其需要量

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(3) 从各生产地到各消费地的运输量要求大于或等于零

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

—— 这个问题是20世纪40年代初英美的运筹学工作者提出来的。从此有了“约束条件”和“目标函数”的概念，有了这样的概念网，有了这样的“思维之筛”（指的是：抛弃掉问题的次要内容，保留下其主要部分）。

要想培养自己使用数学语言思维的习惯，先得有给丰富多采的现象世界以精确的数学描述的信念，有用数学方法解决现实问题的兴趣。

数学是研究模式的学问

柏拉图认为：人们对自己在多变的现实世界中的处境的认识，决定于其对理念世界的理解，

而数学就是研究理念世界的不变关系的。——这个“不变关系”就蕴涵着模式的意思。

怀特海在其《数学与善》中进一步阐述了柏拉图的这个思想。在此文中，他先浓缩地讲述了从1870年左右到二十世纪三十年代在数学知识领域中所发生的巨大变革；然后，从中抽象出模式的概念。他说：“对于理解模式和分析模式之间的关系，数学是最强有力的技术。”什么是模式呢？张家龙在校者注中作了如下的解释：“模式，原文是pattern，这是数理哲学中的一个术语，相当于著名数学家贝尔纳斯所说的‘结构’。老师在黑板上用粗粉笔画的直角三角形，是直角三角形的特例，是一种‘模式’，但老师所要讲的却是所有这一类直角三角形，有无限多个。另外，他不是讲直角三角形在黑板上如何如何，而是讲直角三角形在广大的空间中如何如何。画出来的点实际上是很大的，而老师所讲的点则是没有任何空间衰性的。直线和角也都是与空间体系相联系的。所以，怀特海说：‘一个确定的模式（例如直角三角形）并不把它的各种错综复杂的性质直接显示给人的意识。’‘小孩知道，老师所讲的是，用粗粉笔线在黑板上十分清楚地画出的直角三角形。但是，这小孩并不知道隐含于其中的无限多的性质。’这就是理性意识的局限性。理性意识不能认识一切’但它

通过模式这种有限的东西可以认识无限。”——模式的长处就在于：借助于它，我们能认识无限。真是一语道破真谛！

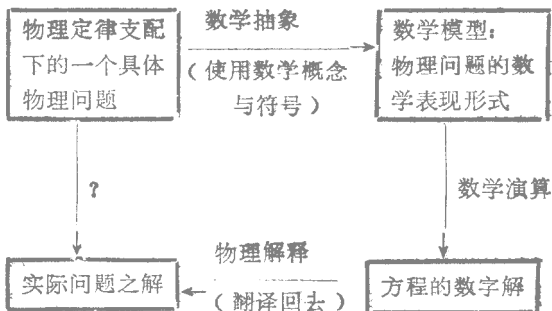
G. 波利亚 (1887—1985) 这位当代著名的数学家和数学教育家，则身体力行地从“研究模式”这样一个角度讲数学。在《数学的发现》一书开头就介绍了四个模式：

- (1) 双轨迹模式 (解几何作图题的模式)；
- (2) 笛卡儿模式 (解代数应用题的模式)；
- (3) 递归式；
- (4) 叠加式。

——这四个模式虽然涉及的内容较为初等，可是，给我们的启示是十分深刻的。为了避免对模式产生误解，他又强调指出：“例题高于模式”，这和我们说的“矛盾的普遍性寓于矛盾的特殊性之中”是一个意思。实际上，波利亚不仅告诉了我们，在数学的这个特定领域中有些什么模式，而且告诉了我们，在数学的所有领域中如何探求模式。

徐利治在《数学方法论选讲》中向我们进一步揭示了模式与多变的现实世界的关系。他说：“‘数学模型，的含义很广。粗略地说，数学模型乃是针对或参照某种事物系统的特征或数量相依关系，采用形式化数学语言，概括地或近似地表述出来的一种数学结构。”他还将一个物

理问题的模式化过程，以图解表示如下：



——这样，数学就真的成了研究模式的学问了。

“模式只是我们理解经验的一个因素，它或是具有直接的价值，或是激起追求未来价值的活动。”“数学的本质特征就是：在从模式化的个体作抽象的过程中对模式进行研究。”——怀特海的这些话是值得我们深思的。

数学怎样成为可应用的

应用数学如雨后春笋蓬勃发展：用试验设计的方法安排生物科学的试验，并处理其试验数据；用常微分方程处理细胞增长问题；用非线性微分方程组研究酶动力学；等等；从而建立了生物数学。用最小二乘方原理处理统计数据；用投入产出法研究综合平衡模型；……；从而为经济数学的建立创造了条件。——真是不胜枚举，前

景辉煌。

在科学发展中始终有一种趋势，即要从数量上去阐述所研究的大自然和社会客观世界的现象和过程，要对这些现象的特点、性质和实质作出数量上的评价，因而要去运用某些数学方法来加工和分析具体的资料。这一趋势的客观基础是：在大自然和社会中到处都存在数量和质量统一的原则。在客观世界中，不存在某种“纯”质量，或者不和质量相联系的“纯”数量。它们永远处于统一之中。因而，表示其质量属性的某一现象的实质，只有在该数量的数量程度得到显露时才能被充分地揭示出来。正如保·拉法格所指出的，马克思认为：“科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地位。”

《计量历史学》的兴起，是一件很有趣的事。其由来一是来自于历史学家。如要更深入和更准确地揭示历史现象和过程本质需要；促使历史学家们必须运用计量和计算机方法；其二则来自数学和计算机科学的发展。从二十世纪五十年代末，各国的史学家就日益广泛地运用计量和计算机方法来加工和分析具体的历史资料。在《计量历史学》中应用的数理统计方法有：抽样法，相关分析，动态级数的统计分析，假设的统计检验，多维统计分析法，等。

数学向其它学科渗透的具体机制是：首先，

在它往其中渗透的那门学科中提出数学问题；然后，用数学方法解决那个数学问题。我们能在该门学科中提出数学问题，是由于在该学科的研究课题中找到了“不变量”。甚至，可以把这个“不变量”看作是数学向其它学科登陆的“桥头堡”。

“数学成为可应用的”有一定的规律，有一定的特点，因而，它本身也成为一门学问。有的人以此为职业，被称做数学工程师。

数学与猜想

关于数学与猜想的关系，波利亚作过如下的简而明的论述：

“数学的创造过程是与任何其它知识的创造过程一样的。在证明一个数学定理之前，你先得猜测这个定理的内容，在你完全作出详细证明之前，你先得推测证明思路。你先得把观察到的结果加以综合然后加以类比。你得一次又一次地进行尝试。数学家的创造性工作成果是论证推理，即证明；但是这个证明是通过合情推理，通过猜想而实现的。只要数学的学习过程稍能反映出数学的发明过程的话，那么就应当让猜测、合情推理占有适当的位置。

正如我们说过的，有两种推理：论证推理和合情推理。在我看来它们互相之间并不矛盾，相反地，它们是互相补充的。在严格的推理之中，首要的事情是区别证明与推测，区别正确的论证与不正确的尝试。而在合情推理之中，首要的事情是区别一种推测与另一种推测，区别理由较多的推测与理由较少的推测。如果你把注意力引导到这两种区别上来，那么就会对这两者有更清楚的认识。

一个认真想把数学作为他终身事业的学生必须学习论证推理；这是他的专业也是他那门科学的特殊标志。然而为了取得真正的成就他还必须学习合情推理；这是他的创造性工作赖以进行的那种推理。”

波利亚还身体力行地对数学家们提出猜想的思维过程作过认真的探讨。他剖析过哥德巴赫猜想的形成过程；他研究过关于凸多面体的面数、顶点数和棱数之间的关系式是怎样先被猜出来的，等等。

H·梅什科夫斯基在《大数学家的思维方式》一书中也作过类似的探讨。他研究过库萨的尼古拉（1401—1464）如何运用哲学上的见解分析数学问题；以及帕斯卡在创立和运用数学归纳法，证明算术三角形定理的过程中的思想方法；讨论过莱布尼兹发现莱布尼兹级数，即

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

的实际思想过程，等等。

费尔马(1601?—1665)在梅齐利亚克 1621 年翻译的丢番图《算术》的拉丁文译本的手抄本的页边上写的注记在数学史占有重要位置。

他写道：

(1) 如果 p 是一个素数，并且 a 与 p 互素，则 $a^{p-1} - 1$ 可被 p 整除。

(2) 每一个奇素数可用且仅可每一种方式表为两个平方数的差。

(3) 一个形式为 $4n+1$ 的素数可以表成两个平方数的和。

(4) 一个形式为 $4n+1$ 的素数，作为整数边直角三角形的斜边，仅有一次；其平方有两次，其立方有三次，等等。

(5) 每一个非负整数可以表示成四个或少于四个平方数的和。

(6) 整数边直角三角形的面积不能是一个平方数。

(7) $x^2 + 2 = y^3$ 只有一个整数解； $x^2 + 4 = y^3$ 只有两个整数解。

(8) 不存在正整数 x, y, z 使得 $x^4 + y^4 = z^2$

(9) 不存在正整数 x, y, z, n 使得 $x^n + y^n = z^n$ (当 $n > 2$ 时)。

(10) 对于所有非负整数 n , $f(n) = 2^{2^n} + 1$ 是素数。

——后来, (1)、(2)、(3)、(5)、(6) 被证明, 成为定理; (10) 被否定, 连猜想也不成立了; 其余的则至今仍是猜想。

活跃于 13 世纪的杰出数学家斐波那契 (1175—1250) 在他的名著《算经》中提出了兔子问题, 让我们猜。猜来猜去, 猜出了斐波纳契序列, 猜出了卢卡斯序列, 还猜出一系列有关的定理。

数学需要猜想, 猜想能出数学——这就是我们的结论。

培养数学思维能力

这里讲的数学思维指的是进行数学活动中的思维; 而数学活动指的是数学学习、数学教学、数学研究和数学应用。事实上, 不存在独立于其它思维, 这样称呼它, 只是为了讨论方便。

数学思维能力, 大体上包括以下内容:

第一, 在现实世界中提出数学问题并予以解决的能力。当你把一个现实问题摆到学生面前时, 他们常常感到没有头绪, 无从下手。他们不知道所有的现实问题原本都是“没有头绪”的,

那些“有头绪”的问题都是数学教材作者和数学教师人为地雕琢出来的。在这里，关键的一着是作数学抽象，抓住主要数学关系。经济学家在研究地区发展战略时，有这样一个过程；理论物理工作者在探讨粒子模型时，也有这样一个过程。用徐利治先生的说法，就是掌握数学模型方法和关系映射反演原则。

第二，掌握解数学题的模式。波利亚在《数学的发现》一书中列出了四个数学模式。可是，我们绝不能抱住模式学模式，而应该猜测波利亚是怎样得到其模式的，追循他的思维方式从字里行间得到的信息，可以想象：波利亚的路子大体是：(1)做了相当数量的题；(2)对这些做题过程进行了反思和归类；(3)对同一类题的解题思路进行了概括，从而引出模式。因而，掌握解数学题的模式的最佳办法是：在自己所学习的（波利亚没有列出模式的）数学分支内，找出一些例题，对它们进行分析和归类，并从中构造出模式来。因为只有通过自己的思维实践，才能得到切身的体会。

第三，掌握证数学题的模式。某些数学教材给我们的印象是：数学就是一连串的定义、公理、定理和推论，它们是天生的，从它出生的那天起就是这个样子。如果我们把生成这些定理的曲折道路和对定理作出如此排列的曲折道路都置入视野，情况就不一样了。这时，我们才可以说

是：掌握了一种证数学题的模式。只要我们认真地读一读 G。波利亚和薛戈合著的《数学分析的问题和定理》，就能体会到，证题的关键在于：对于与该题有关的一系列问题的应有顺序要了如指掌，并知道该题在其中的几种可能位置。说到底，证一种数学题的模式实际上是一个公理体系（包括它的种种变化）。

第四，掌握构造数学模式。F。克莱因在对几何学的所有分支作了认真的比较考察之后，用变换群来定义几何，构造了几何学的模式。他写在《埃尔兰根纲领》中的这一思想，指导了以后五十年的几何学的发展。布尔巴基学派认为数学各分支应按结构性质来划分，谋求用公理方法按结构观点来重新整理各个数学分支；他们将数学结构分为三大类，即：代数结构，序结构和拓扑结构；他们以其三十六卷《数学原本》构造了整个数学。

数学与思维有不解之缘。我们常说，数学是思维体操，能锻炼人的思维；其实，不仅如此，数学还能使人的思维清晰、明确、和谐，就像音乐对人脑那样美妙无比！像王浩先生说的那样：纯粹的美（*dry beauty*）。

思维可以演算吗

不仅数学中有思维的问题，而且思维中有数学的问题。

“思维演算”的概念来自莱布尼茨，因此，我们要从他讲起。不仅要介绍他的初始思想，而且要探索他的思想来源，并揭示其思想的丰富内涵。

莱布尼茨（1646—1716）德国著名的哲学家、数学家、逻辑学家，是数理逻辑的创始者。莱布尼茨学识渊博，对哲学、物理，工程、生物、历史、语言等都有深入的研究。他几乎与牛顿同时创立了微积分。

在《论组合术》（1666）一文中，才20岁的莱布尼茨就提出过改革逻辑的两步计划：其一是创立一套通用语言，以消除现存语言的局限性；其二是设计一套推理的普遍演算，把它作为工具去处理通用语言。

在《通向一种通用语言》（1677）一文中，莱布尼茨说：

“一个古老的谚语说，上帝依照重量、度量和数量创造了万物。可是有许多东西，即凡是不受力或动力影响的东西，并不能加以估量，任何

不可分割为部分的东西也难以度量。另一方面，没有一样东西不被包摄在数量之中。因此，数量可以说是一个基本的形而上学的形式，算术是一种宇宙的静力学，在其中显示事物的诸动力。

在数之中隐藏了最深奥的秘密，这一直是从毕达哥拉斯时代以来的人们所确信的。……有不少人坚持那个古老的信念，即惊人的发现在往借助于一种新的语言的数、字或符号而来临，‘亚当后裔，雅各·波墨将此称为自然语言。

虽然如此，或许还没有人识破这个真正的原理，我们可以对一切对象指派其确定的特征数字。……确实，长期以来，不少杰出的人已经宣布了一种‘通用语言，或‘文字，在其中，各种各样的概念和事物都能用一个合适的顺序加以组合，借助于它，不同民族的人才有可能相互交流思想，把一种外来语的书写符号译成他们自己的语言。可是，迄今为止，还没有人已经掌握到这样一种语言，它既能包含发现新命题的技术，又能包含对这些命题的批判的考察的技术。……

由于某种命运，我从孩提时代起，就已被引入这些反思。此后，正象人们对待最初的癖好那样，它们一直极其深刻地烙印在我的心上。……

在我的青年早期，曾表现在对历史和修辞学的偏爱……。在我刚刚理解所有这些科目的任何东西之前，我在纸上写下了从我脑海中浮现出的

许多富于想像力的思想。当我把它们递给老师时，他们震惊了。我所探索的其中之一是范畴的问题。我特别想要说明的是，正如我们有许多范畴来判断简单概念的类别一样，也必然有一种新的范畴，以其自然的顺序包摄命题本身或复合的诸项。……我就完全独立地去承担建立上述复合的诸项的范畴或原理的工作。作为我对这个问题勤奋努力的结果，我终于通过内在的必然性，达到一个令人惊奇的重要的反思：我思考出，我们必然会创造出一种人类思想的字母，通过由它组成的联系和词的分析，其它一切都能被发现和判断。当时这个灵感给了我一种非常难得的喜悦。……

我常常感到惊奇的是，就任何书面证据所指出的而言，为什么迄今还没有人着手于如此重要的题目。……笛卡儿之所以未能把他的努力引向这个目标，只能通过这样的事实来说明，即他没有抓住这个问题的更深一层的意义。……

恰恰相反，不管我是如何忙碌或闲散，我总是坚定不移地持续在这方面的反思。……我早已直觉到它的全部意义，并觉察到达到这个目标的一个惊人的和简易的方法。对我来说，它耗去了我的艰苦的反思，但我终于发现了这个方法，为了建立这种文字，换言之，我以后为了建立对所有概念都适用的特征数字，完全需要按照一种新

的方法，去创立一种数字——哲学的研究过程。……

一旦人们对最大部分的概念建立起特征数字，那时人类将会拥有一种新工具，它提高智能的能力，胜过光学工具之加强人眼，而理智之优越于视力，将和显微镜和望远镜之取代视力一样。它的用途之大，犹如给水手以指南针，它比星座带给所有在海上从事调查和实验的人的用途更大得多。从其中会进而产生出什么，这取决于命运之手，但它肯定会带来重要的和卓越的结果。……当这种特征数字能以其明晰和确定在所有事物中显示出理智的时候，它的权威才不再受到怀疑。……

……我曾创制了一种精美的技巧，通过它，确凿的诸关系可以用数字加以表述和固定，然后又能在数字计算中进一步加以确定。……我抓住那些和特有的性质相关联的数字，然后借助于它们，用惊人的灵巧直接在数字上证明全部逻辑的规则，并且能查明一个已知的论证是否在形式上能确定地提供一个标准。不管怎样，一旦我们占有了事物本身的真正的特征数字，一个证明是否实质上是确定的，就可以第一次得到判断，而没有任何困难，也没有陷入谬误的危险。”

在《发现的技术》（1685）一文中，莱布尼茨又说：

“我甚至还发现了一件惊人的事，那就是我们能用数字表达各种各样的真理和推断。”

“校正我们推理的唯一途径是使它们像数学家的推理那样明确，使得我们能一眼就找出我们的错误，当人们发生争论时，我们只不过说，让我们计算一下，立即就会看出谁是对的”。

一般认为，莱布尼茨不仅较前人更突出更明确地提出了数理逻辑的指导思想，而且做了不少具体工作，虽然这些工作只是不成熟的和探索性的。

然后，再来讲讲布尔。布尔（1815—1864）是一个数学家。他的逻辑著作有《逻辑的数学分析》（1847）和《思维规律的考察》（1854）。布尔曾以构造一个演绎思维的演算为其目标。他的指导思想是，逻辑关系和某些数学运算甚为类似，代数系统可以有不同的解释，把解释推广到逻辑领域，就可以构成一思维的演算。

如果我们把莱布尼茨的思想与布尔及其后继者的工作进行比较，该得出什么结论呢？我认为：莱布尼茨的“思维演算”的思想来源于这位哲学家对自己的思路的反思，内容异常丰富，至今我们还没有很好把握它；布尔及其后继者的工作，则局限于构造一个演绎思维的演算。在这里，既给丰富多采的思维活动加了限制，又给灵活多样的演算技巧加了限制。打破这种画地为

牢、作茧自缚的局面，还莱布尼茨的“思维演算”思想的本来面目，是我们的责任。

数学与思维密切相关。深入地探讨这两者之间的关系，必将有助于我们真正地实现莱布尼茨的夙愿。

八 沉思篇

思维器官的性能、“档次”和功能

如果您是一位厂长，知道自己厂里从国外进口了一台效率很高、价钱很贵的机器，放在露天的地方，任凭风吹、日晒、雨淋，您是否会感到内疚，认为这是最大的浪费？我们每个人都随身带着一台最灵巧、最珍贵、效率最高的“机器”那就是我们思维着的大脑。我们远没有把它的效率充分发挥出来，这难道不是浪费？这难道不是问题？

任何机器都有自己的性能，思维器官的性能该从哪几方面来刻画呢？我想：大体上有以下几个方面：广度、深度、清晰度和灵活度。（1）广度：视野广阔，常能把所考虑的问题放到宽阔的背景上去考察，就称得上有广度了。（2）深度：能从现象逐步深入到本质，在不同的层次上对待自己面前的客观事物，可谓有深度。（3）清晰度：常能把思维理出个头绪，把问题想清楚（确切地说，是由模糊转换成清晰的速度快），就可以说清晰度强。哥德说，能真正地把一个问题说得很清楚，也就能把许多事情说清楚；大概就是这个意

思。(4) 灵活度 有两层意思，一个是机器开动所需的时间短，好比日光灯上的“启动器”，“启动器”好，灯一开就亮；另一个是，从此问题向彼问题（或从此角度向彼角度）转换所需的时间短。

汽车依档次不同而有速度的快慢，思维器官也有不同的“档次”，这就是：静思、凝思、沉思、畅想和遐想。（1）静思：静下心来，很自然地，只想一件很简单的事。（2）凝思：凝神专注地思考一个问题。在这里，“专注”很要紧。（3）沉思：只有思想深沉，才能把问题想透。（4）畅想：畅，有通畅、流畅、舒畅的意思，要紧的是要如行云流水一般。（5）遐想：无论从时间上，从地域上，还是从学科领域上说，都可以想得很远。——如果我们能像老练的司机那样，依道路等条件的不同，灵活地更换“档次”，我们的思维效率就一定会比较高。

思维器官的功能也是多方面的：有音乐方面的思维能力，美术方面的思维能力，以及语言文学方面的，数学方面的，技术方面的，管理方面的，等等。比如，音乐方面的思维能力就包括听懂音乐中表述的思想的能力和用音乐表述自己的思想的能力；数学方面的思维能力就包括：把现实问题归结为数学问题的能力，解数学题的能力，证数学题的能力和构造数学的能力；技术方面的思维能力则包括：掌握技术的能力和创新的技

术的能力；管理方面的思维能力则包括：处理日常事物的能力和应变的能力。在这里，必须指出以下两点：(1)人的素质（包括先天的原因和后天的原因形成的）存在差异，有的人较适于培养这方面的思维能力，有的较适于培养另一方面的思维能力；(2)各方面的思维能力又是相互联系、相互促进的。孤立地、静止地为了某种“需要”而进行单方面的教育，效果不一定好。

了解自己思维器官的性能和功能，正确地使用它，是一回事；不断地改善自己思维器官的性能和功能，使它能更好地工作，则是另一回事。是时候了，是在改善自己的思维器官的性能和功能上下功夫的时候了！

大脑保健操

生命在于运动。大脑是人这个生命体的重要组成部分，其健康也在于运动。

大脑保健操，有两层涵义：

第一，思维与动作的平衡。

脑力劳动者长时间地进行紧张的思维活动，而与脑子密切相关的许多部位则处于相对静止的状态。调节思维“机器”的最好办法是：构造一个新的平衡，即：让脑子静下来，而让某些相关

的部位活动起来。比如，一方面超觉静思，一方面按摩头部、颈部和面部，就是最简单的办法。超觉静思的具体要求是：端正姿势，调整呼吸，闭目安神，内视自己，控制感觉，把意识集中于一点，进入万念皆空的境界。（为了做到这一步，读一点佛教禅宗的书，领悟一下其中的哲理，是有好处的。）日本川畑爱义所倡导的三套健脑操：（1）头部操，（2）超觉静思跑步，（3）瑜伽式天地体操，效果很好；不仿根据条件选做。

平时很少主动地、积极地进行思维活动的人，更应该经常给自己规定一些这方面的事做。

第二，情感与理智的平衡。

在你长时间地埋头写作，感到有点疲劳时，可以听听音乐，练练书法。古时候，用琴、棋、书、画陶冶人的性情，是有道理的。因为，你原来过于理智、过于严肃，情感处于抑制状态；而现在，情感可以自由地舒展，暂时放弃理智的分析。

如果你的职业和你的生活习惯都使你在情感上放松，而理智的那个侧面却处于抑制状态；那么，进行一些逻辑思维也是有好处的。

毕达哥拉斯学派认为音乐和数学能净化人的灵魂；也许就是这个道理。

情感与理智的平衡，既是探求真理的需要，也是生活的需要。

17世纪著名数理科学家帕斯卡（1623—1662）在《思想录》中颇带恢谐、同时意味深长地说：“酒太多和太少：一点都不给他，他就不可能发现真理；给他太多，也会一样。”也许说的就是这个意思。

思维训练

有的人善于思维，有的人则较差，这是大家公认的事实。也就是说，人们都承认：思维是一种技能。但是，一般只相信熟能生巧，不相信能通过训练改善思维技能，对思维训练表示怀疑。主要原因在于：没有抓住思维这种技能的本质特点。

思维活动是一个过程。思维技能高，高就高在能根据具体条件采取最为切实可行的思路。

比如，要熟悉一个陌生城市的街道，可以使用不同的方案。每种方案各有所长（可靠性、学习速度等等），也各有所短（不完全性、缺乏迁移性等等）。可以采取的方法有：（1）求知法：像出租汽车实习生那样去系统地考察这个城市（可以挑选一个区域作一番彻底的研究，然后再去考察相邻的城区；还可以分层次对全城进行考察，首先熟悉大街，然后熟悉小街，最后再去熟

悉那些背街小胡同)。(2)程式运筹法:运用某种程式,熟悉要常走的线路和地区;知道坐几路汽车,在哪里下车,等等。(3)普通运筹法:它包括学习问路、学看地图、乘出租车去熟悉基本线路、在每个地区记住一个标记并把它们连接起来、很快熟悉经常要去的地区并由此向外拓展等等。——看来,求知法太耗时,太费心,不等到知识积累到一定程度就使用知识,是相当困难的;程式运筹法固然是又敏捷又可靠,但有很大的局限性;普通运筹法不如前两种方法精确,也不如它们那样可靠稳妥;可是它既容易学到手,又可以迁移去认识任何一个新城市。

其实,这是很有代表性的。在科研工作中就有类似的情况。大多数学生认为:在进行研究之前,他们首先应该熟悉已有的成就。为了消除这种想法,并鼓励他们早些独立搞研究,雅科比(1804—1851)很风趣地作了这么个比喻:“如果你主张,在和一个女子结婚之前先要认识世界上所有未婚女子的话,你父亲就一辈子不会结婚,你也就生不出来。”——这显然指的是“求知法”。如果对某门学科的整体基本处于胸中无数的状态,只是摸着一点情况就干一点,就与“程式运筹法”很相近。把掌握学科的新思路、查文献、掌握基本线索并把它们贯穿起来,作为通用的方法来考虑,就属于“普通运筹法”了。

此外 还可以进行“考虑一切因素”、“考虑各种后果”、“可能性与选择”和“寻找其它方法”等思维训练。

要注意的是要把思维过程作为研究的客体。重点要放在练习解决许多不同的问题上，使学生把注意力集中在思维的过程，而不是集中在思维的内容上。

生物钟与思维

一般认为：每个人自出生之日起，体内的生物钟（生物节律或生物节奏）便开始运行起来。其中影响人的记忆力、敏捷性和逻辑思维能力的“智力周期”每33天循环一周；影响人的抗病能力、肌肉力量及运动速度的“体力周期”为23天一个循环；而影响人的情感、精神和心理状态的“情绪周期”为28天循环一周。各个周期又可分为高潮期、低潮期和临界期。在智力高潮期，人的大脑思维开阔，记忆力强，学习效果好。在体力高潮期，感到浑身是劲，不易生病，劳动效率高。在情绪高潮期，表现出心情愉快，精神焕发，谈笑风生。遇到3条节律曲线均处于高潮期，则在各方面会表现出超常的能力。

其实，人的生物节律绝不仅限于此，它还包

括年周期（春、夏、秋、冬），月周期（依我国农历计），日周期（一天24小时）和出生、成长、衰老、死亡的生命曲线。

《黄帝内经素问》是我国现存最早的中国医学经典文献。该书大约成书于春秋战国时期。第二篇调神篇中有这么一段话：

“春三月，此为发陈。天地俱生，万物以荣。夜卧早起，广步于庭，被发缓形，以使志生，生而勿杀，予而勿夺，赏而勿罚，此春气之应，养生之道也。逆之则伤肝，夏为寒变，奉长者少。

夏三月，此为蕃秀。天地气变，万物华实。夜卧早起，无厌于日，使志无怒，使华英成秀，使气得泄，若所爱在外，此夏气之应，养长之道也。逆之则伤心，秋为疾疢，奉收者少，冬至重病。

秋三月，此为容平，天气以急，地气以明。早卧早起，与鸡俱兴，使志安宁，以缓秋刑，收敛神气，使秋气平，无外其志，使肺气清，此秋气之应，养收之道也。逆之则伤肺，冬为飧泄，奉藏者少。

冬三月，此为闭藏。水冰地坼，无扰乎阳。早卧晚起，必待日光，使志若伏若匿，若有私意，若已有得，去寒就温，无泄皮肤，使气亟夺，此冬气之应，养藏之道也。逆之则伤肾，春

为痿厥，奉生者少。”

——这是说的年周期。

有的病易在初一发作，有的病易在十五发作。——这是说的月周期。

据说，有某种药在凌晨四点服用，比在其它时间服用的效率要高好几倍。——这是说的日周期。

女人有更年期，男人也有更年期。——这是与出生、成长、衰老、死亡的生命曲线相关的。

在这里必须指出：(1)这些生物节律彼此交错，产生影响；(2)对于每个人来说，是具体的；(3)由于职业不同、生活习惯不同，是在一定范围内变化的。也就是说，对人的生物节律必须作这样的具体的、活生生的理解。

以关于人的生物节律的这个观点为基点，对于思维能力的培养、学习安排等都能提出更深一层的问题：比如，学习语言安排在多大年龄合适；要记的东西安排在一天的什么时间合适；等等。

无论如何，我们想要提高思维效率，就必须顺应人的生物节律。

静思与沉思

静思，也就是静下心来思考。不过，要注意

的是：并不是指环境的静，主要指的是心静。英国著名哲学家罗素关于中国人静思的智慧，写过一段发人深省的评述。他认为：英国人可以从中国人那里“学到一些静思的智慧”；中国能给英国“一些胸襟开阔的容忍和静思式的安心。”

实际上，烦躁、暴躁，意味着无能；而沉着、冷静，意味着坚强。这里所说的无能，就是无能控制自己。诸葛亮一年四季手里都拿着那把鹅毛扇，这里面恐怕就包含着这层意思。佛宗禅宗认为，静能悟道。其实，静所能悟的，岂仅是佛教的哲理。

沉思，也就是沉下心来思考。这时，思维处于纯净的状态，不受干扰，想得深、想得透。沉思是思维的最高“档次”。

笛卡儿（1596—1650）说，他的大部分成果出自早上休息的那段适宜沉思的时间。他写下了《形而上学的沉思》。帕斯卡（1623—1662）喜欢沉思、冥想，写下了四十万字的《沉思录》。——他们以沉思录的形式，为我们留下了可贵的精神财富。其实，任何一位科学家或哲学家都是喜欢沉思的；而且他们的杰出成果就出自沉思。

怎么样才算是“沉思”？“沉思”里面有什么奥妙？

我曾试着这样做：不谈话，不看书，不看报，而是单纯地思考。想一件事该怎么办，想

道题该怎么做，想一篇文章该怎么想，甚至想一本书的提纲：先进入角色，然后把网撒开，再逐步收拢，最后理出个头绪来，并在自己头脑里重复两遍。开始时连续二十分钟，逐渐延长到半小时，甚至四十分钟，要让自己在这段时间内不离开那个思想境界。

我发现这样做有两个好处：（1）在沉思时，思维能自由驰骋。边说边想，要受语言的约束；边写边想，要受文字的约束。（2）在沉思的过程中，能提高自己控制思维的能力。当你养成了沉思的习惯之后，也就能把自己的思维灵活地安排在不同的“档次”上了。

静思与沉思，是思维的高度纯净状态。进入过这个境界并常常出入于这个领域的人，在思维上具有较大的自主性。也只有这样，才能体会到思维的纯净的美。

九 物质篇

氧与思维

不知你注意到了没有？在中日围棋擂台赛期间，聂卫平每逢杀得难解难分时，总要吸一两次氧。几口氧气一吸，这位棋坛高手就如虎添翼，思维敏捷，计算精确，妙手连出。这是怎么回事？因为氧对健脑益智有奇效。

大脑的新陈代谢是十分活跃的，如果把它在代谢时所作的功转化为能量，相当于一个20瓦电灯泡所发出的能量。而大脑新陈代谢的每一个环节，都离不开氧。一般成年人大脑的重量只占体重的四十七分之一，而它却要耗去全身用氧量的四分之一。这么多的氧气，需要由足量的血液送给脑组织。为此，心脏要把它泵出血液的五分之一（两吨以上）供给只占体重四十七分之一的脑组织。科学家做过一个实验：一个人平躺在天平上，然后让他做一道复杂的数学题，随着思考的不断深入，天平上头部所在的一侧便逐渐下沉。

这表明随着大脑耗氧量的增加，脑血管扩张，血流量逐渐增加脑袋就变“沉”了。（沉思的“沉”字，也许还包含这个意思。）

在这方面，反面的例证也多得很。煤气中毒，可使大脑迟钝；空气憋闷，可使人头昏脑晕。

对每个人来说，脑力劳动时能否获得足够的氧气和血液，和心肺功能密切相关。若没有较大的肺活量和泵血有力的心脏，就很难满足大脑对血、氧的渴求，大脑就会因“能源危机”而频频告急，乃至无法启动。强有力的心肺功能靠的是什么？靠的是不间断的体育锻炼。

脑子的灵活与否，决定于大脑新陈代谢的快与慢；而大脑的新陈代谢能否顺利进行，又决定于其能源的补充——主要是氧。氧气之重要，可以想见；锻炼身体之重要，可以想见。

睡眠的作用

大脑生理学发现：脑在工作时，需要某种含氮化合物，而这种含氮化合物在脑中只限于特定的时间内才能大量制造。这个特定的时间就是睡眠的时候。人们以为睡眠对于脑来说仅仅是休息，原来并非如此。

当然，不能否认睡眠是休息这个判断。虽然在睡眠时，体内的肠胃、肾脏等器官还和白天一样地工作着，但是就整体而言，毕竟都处于松弛、休息的状态，新陈代谢至少比白天低10%以上。脑也同样休息了。

然而通过实验发现：尽管整个身体处于休息状态，可是，却仍然消耗着相当多的能量。这是为什么？人们对此曾经感到不可思议。实际上，这些能量是用来制造脑工作时所需要的含氮化合物的。也就是说，在黑夜睡眠的时候，脑在大量制造含氮化合物，为醒来做准备。

除了含氮化合物的制造要靠睡眠外，还有一种对人很重要的物质要靠睡眠来提供，那就是前叶激素。人体的生长是由脑下垂体前叶分泌的前叶激素控制的。这里的激素分泌如果不充足，人就会患侏儒症；相反，假如分泌的激素异常之多，则又会患巨人症。这一点是人们早就知道的现象。但是，发现前叶激素几乎只在夜间睡眠时才分泌，却是最近的事。“能睡的孩子长得快”，看来是有道理的。

一句话，睡眠的重要性，非同小可，不可忽视；连睡眠的时间都舍不得的人是愚蠢的。

物质营养

脑是物质的；物质的脑需要不断地补充以物质，这是理所当然的事。

脑在日常工作中所需要的水分、葡萄糖、蛋白质、脂类以及无机盐、维生素等等，每天都不能低于一定的量。从这个意义上讲，饮食量极端少的人是给脑加重额外的负担。只有神仙才能靠吞云吐雾研究学问。

水分占脑总重量的70%，一旦缺乏水分，脑的机能就会受到严重的妨害。一般地说，每天最少需要三升水。

除掉水分之后，脑的重量，约一半是脂类，三分之一是蛋白质。如果把脑比作一辆汽车的话，那么，蛋白质就是机器，脂类就是电器系统，糖类和氧气则相当于汽油。对于充分发挥脑的机能来说，这些物质缺一不可。

关于脂类，脑每天需要30—40克优质植物油。

核酸是掌管记忆的，蛋白质又是核酸的营养源。核酸是由氨基酸和葡萄糖组成的，所以，蛋白质和糖类的摄取是不可欠缺的。

日本川畑爱义提出能够向脑补给上述各种营

养物质的五大营养食品为：牛奶、沙丁鱼、菠菜、胡萝卜、桔子。这五种食物主要有利于改善脑的机能。

(1) 牛奶具有最好的调和作用。

牛奶是一种近乎毫无废料的完全营养品。牛奶中所含的蛋白质质量好，在所有的食物中名列前茅。脑所必须的氨基酸含量十分均衡。钙的含量也很高，而且非常易于吸收。牛奶中最含有丰富的维生素 B。

(2) 最好的蛋白质源——沙丁鱼。

沙丁鱼具有上等的蛋白质，且是丰富的钙源。

(3) 菠菜是维生素的宝库。

(4) 胡萝卜含有大量维生素。

我国也有“吃了三斤胡萝卜，顶得一根小人参”的谚语。

(5) 桔子是水果之王。

桔子也是维生素的宝库。拿它和苹果相比，维生素 B₁ 的含量是苹果的10倍，维生素 C 的含量是苹果的12倍，维生素 A 的含量竟然是苹果的70倍！

另一方面，也要注意：不吃有害于脑机能的物质。这指的是：食用人造色素、香料等。

除此之外，饮食方法也相当重要。要知道：饱餐之后，思维能力极低。这是因为饭后为了消

化和吸收所吃的食物，大部分血液都集中在肠胃。因此，为了改善脑的机能，要学会“适当空腹”；意思是说，应该经常使肠胃处于适当空闲的状态，以便让新鲜血液流入大脑。

十 效率篇

总而言之

笛卡儿说过：走过两遍的路就是方法。让我们顺着本书的思路再走一遍吧！

〔思维的目的性〕

思维是人接受信息、存贮信息、加工信息以及输出信息的全过程。

人的思维并不总是围绕一定的目标，为了解决某个问题而进行的。把思维定向化，让自己进入角色，才有“效率”可言。

当我们的思维专注地凝聚在一个问题上时，用不了多少时间，就会有所进展。

〔思维材料〕

为思维提供材料，主要靠的是我们的感官和感官的延伸。

知觉是取得经验的根据，而经验又常给知觉以促进和约束。

感觉、知觉不仅能为我们提供直接经验，而

且能以多种方式，从多方面为我们提供间接经验。

在谋求提高我们自己的思维效率时，不能不对文明的结构有个宏观的认识，对自己的处境有个客观的理解，从而把思维能力用在该思维的地方，把劲使在刀刃上。

学会并且充分利用一切有效的掌握信息的手段，实际上是延伸我们思维的触角。

〔思维材料的存贮与提取〕

理解可以加深记忆。

“凝视、闭目，反复多次”和“刻画、表述，以输出求存贮”是加深形象记忆的好办法。

要在贮存时为提取创造条件：分类、归纳，建立多渠道检索的“索引”。

〔思维的诸载体〕

语言、音乐、美术、舞蹈、表情，都是思维的载体。如果我们具备使用不同层次的各种思维载体的能力，而且能以多种方式灵活地使用它们，我们就能够在任何时刻将我们的思维深入到任何问题的任何层次上。

〔思维的基本框架——逻辑〕

逻辑——人类的思维框架，在人类进步的历史长河中发展着，在个人成长的全部过程中发展着。

逻辑学是我们人对逻辑的认识，有很大的局

限性。与其说思维要符合“逻辑”（逻辑学中的概念）才是正确的，不如说“逻辑”应该跟踪思维。逻辑学的新发展，就有这样的趋势。

〔思维机器的软件〕

思维方式是软件。思维方式有多种划分法：依民族分，依信仰分，依哲学观点分，也可以依职业分。

思维方法是软件。科学家们之所以取得那么多思维成果，妙就妙在其思维方法上。

思维规则也是软件。笛卡儿的思维规则是发人深省的。

了解自己的软件，改善自己的软件，是提高思维效率的重要途径。

〔思维的可演算性〕

数学是一种语言。数学对于理解模式和分析模式之间的关系，是最强有力的技术。数学的每一条定理，都是先猜想、后证明的。

莱布尼兹关于“思维可以演算”的思想是异常丰富的。

〔沉思的习惯〕

思维机器的性能，大体上有以下几方面，广度、深度、清晰度和灵活度。

思维机器有以下不同的“档次”：静思、凝思、沉思、畅想和遐想。

思维机器的功能，也有多方面的：文学艺

术，科学技术，等等。

思维技能是可以通过训练掌握的。

人的生物节律有多方面的涵义。在考虑思维能力的培养时，要注意人的生物节律。

沉思时，思维处于高度纯净的状态，效率最高。

〔物质的脑〕

人脑是物质的。物质的脑需要不断地补充以必须的物质。

氧对大脑来说，十分重要。为了给大脑泵够氧，必须坚持体育锻炼。

纵观全书，说的全是些大实话，都是现实地存在着的规律。

医学圣人希波克拉底曾说过：“人越是远离自然，便越是接近疾病。”在用脑方面，最可靠、最有效的方法，归根结底还是那种符合自然规律的方法。

提高思维效率的有效途径

学习效率也好，工作效率也好，哪一样也离不开思维效率。著名数学家帕斯卡说得好：“为了更好地行动，我们努力去认真思考。”正因为

如此，如何提高思维效率的问题，为广大谋求把自己培养成人才的人所关注。

思维活动受多方面的激发，也受多方面的制约，因而，提高思维效率的途径多得很。主要的途径有三条：

第一，提高使用思维载体的能力，尤其是使用语言的能力。如果我们能准确地使用语言，敏捷地使用语言，并且掌握语言的多样性，我们的思维效率一定会提高。反过来说，语言含糊不清、语言迟钝、单调的人，思维又怎能敏捷。意大利诗人但丁说过：“语言作为工具，对于我们之重要，正如骏马对骑士那样。最好的骏马适合最好的骑士，最好的语言适合于最好的思想。”

音乐、美术、舞蹈、表情等都是思维的载体。有许多思想，只可意会，不可言传，更是非借助于它们不可。

第二，培养自己思维的习惯，尤其是沉思的习惯。在做一个决策时，要认真地想；在动手写一篇文章之前，要先在“想”上下功夫；甚至，在办任何一件事之前，都应该好好想想。要紧的是要培养自己思维的习惯。“沉思”使思维处于纯净的状态，其思维效率最高。一旦把握了“沉思”这种思维形式，运用其它思维形式就成为轻而易举的事了。

第三，要让大脑能以较高的效率进行思维活

动，就要不断地向它供给氧。为了向大脑泵送足够的氧，就需要每天坚持体育锻炼。

当然，方法只有在使用它时才会产生效力。你真的想要提高自己的思维效率的话，不妨试试。

《思维科学丛书》

自息与思维

大脑与思维

直觉、表象与思维

知识与思维

思维方式

环境、交往与思维

思维的历程

语言与思维

思维效率

思维机器与机器思维

内 容 提 要

本书以思维的目的、材料、存贮、载体、逻辑、软件、演算等论题序列为线索，展开对人类思维效率的讨论。作者揭示了进行有效思维的一些要领，诸如使思维服务于明确的目的；保护感官并用仪器扩展感官；存贮有用信息；认识自身思维方式的长处和短处；为大脑提供必要的物质补充等。

“思维科学丛书”

编委会

主 编	田 运	
副主编	林学谛	丘幼宣
编 委	戴汝为	刘觐龙
	汪培庄	郭俊义
	童天湘	李南元

编 者 的 话

在当代信息社会里，知识、智力、智慧的重要性日益突出。思维对于知识的产生，对智力和智慧的形成起着关键性作用。因此人们对思维问题日益关注，对思维科学的兴趣也日益增强。50年代在国外出现了认知科学。80年代在著名科学家钱学森的倡导下思维科学在中国诞生，认知科学和思维科学都属于研究思维的现代科学。开展思维科学的研究和普及，已成为我国现代化建设中的一项重要事业。

近10年来，我国思维科学领域已经取得不少研究成果。并且初步形成一支研究队伍。另一方面，广大读者也很希望知道思维科学的有关知识，并且运用这些知识使自己获得更多的聪明才智。在这种情况下，编辑出版我国的第一套思维科学丛书，可以满足专业工作者和广大读者两方面的需求。

这套“思维科学丛书”是由我国现今思维科学和相关学科的著名专家学者撰写的。10个选题都涉及思维科学的基础知识，又注意它的应用；既汇合了国内外现代思维科学研究的主要成果，又包含着作者的新的创见。既有鲜明的理论观点，又有丰富的新颖资料，并力求深入浅出。读者通过这套丛书可以对当今思维科学的总体面貌有一个基本的了

解，而且可以帮助读者在实践中启迪智慧、优化思维。

对于具有高中以上文化程度的各条战线的劳动者、工程技术人员、教师、大专院校学生、干部、思想理论与文化工作者，本丛书将是一套有益的参考读物。

“思维科学丛书”编委会